

УДК 532.529

## **Влияние временной структуры флуктуаций температуры газа на воспламенение мелкодисперсных частиц\***

**И.В. Деревич, Д.Д. Галдина**

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана*

E-mail: DerevichIgor@bmstu.ru

Рассматривается воспламенение мелких частиц, т.е. необратимый рост температуры частиц с экзотермической гетерогенной реакцией, скорость которой аппроксимируется законом Аррениуса. Частицы находятся в газе с флуктуирующей температурой, на поверхности частиц происходит процесс теплоотдачи по закону Ньютона. Учитывается временная структура флуктуаций температуры газа. Современными методами функционального анализа получено замкнутое уравнение для функции плотности вероятности распределения актуальной температуры частиц. Флуктуации температуры газа существенно снижают порог воспламенения частиц в газе по сравнению с детерминированным случаем. Из уравнения для функции плотности вероятности найдена замкнутая система сопряженных уравнений для осредненной температуры и дисперсии флуктуаций температуры частиц. Представлены результаты расчетов, иллюстрирующие самоускоряющийся дрейф температуры частиц к температуре начала воспламенения.

**Ключевые слова:** турбулентность, тепловой взрыв, воспламенение, функция плотности вероятности, тепловая инерция частиц, флуктуации температуры, диаграмма Семенова.

### **Введение**

Турбулентные неизотермические потоки реакционного газа с частицами с гетерогенными экзотермическими реакциями встречается в энергетических установках, химических реакторах, камерах сгорания. Для гетерогенных химических реакций, проходящих внутри пористой частицы, необратимый рост температуры — тепловой взрыв — аналогичен воспламенению [1]. Поэтому в дальнейшем эти два термина употребляются равноправно. Скорость химических реакций, а следовательно, и условия воспламенения существенным образом зависят от актуальной температуры частиц. Поэтому исследование влияния флуктуаций температуры реакционного газа на процесс потери тепловой стабильности частиц имеет научное и практическое значение.

Для детерминированных условий тепловой взрыв мелких частиц вызывается превышением температурой частиц критического значения [1–3]. Оценка этой критической температуры следует из сопоставления двух характерных времен. Во-первых, оценивается характерное время роста температуры частиц за счет экзотермической химической реакции. Вторым временным масштабом служит характерное время отвода тепла от поверхности частицы — время тепловой релаксации. Это время определяется теплопроводностью

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-00970).

материала частиц и теплоотдачей в газ. В случае, если характерное время роста температуры за счет химической реакции станет меньше, чем время тепловой релаксации, произойдет тепловой взрыв.

Для турбулентных неизотермических потоков случайные флуктуации температуры газа и нелинейный характер зависимости скорости химической реакции от температуры заметно снижают порог воспламенения частиц. Это объясняется тем, что случайный процесс с ненулевой вероятностью преодолевает любой уровень (см., например, работы [4, 5]). Изменение границы начала воспламенения частиц в турбулентных потоках может повлиять на размеры и компоновку камер сгорания, на критерии безопасности эксплуатации и транспортировки мелкодисперсной горючей примеси.

Автоколебания температуры могут появиться в системе охлаждения каталитических реакторов синтеза, в которых выделяется значительное количество тепла [6]. Например, синтез высокомолекулярных углеводов по методу Фишера–Тропша [7] в каталитических реакторах с дисперсным слоем катализатора сопровождается экзотермическими реакциями с существенным тепловыделением. Потеря тепловой стабильности, приводящая к росту температуры частиц катализатора, способна вызвать разрушение реактора.

В литературе активно рассматривается влияние случайных шумов на поведение динамических систем, обладающих взрывными свойствами [8–12]. В ряде работ [13–15] исследовалось воздействие флуктуаций температуры среды на воспламенение частиц. В этих работах флуктуации температуры среды моделировались дельта-коррелированным во времени случайным процессом (белый шум). Приближение белого шума упрощает математический аппарат, однако белый шум обладает рядом нефизичных свойств. Энергия дельта-коррелированного во времени процесса бесконечна и этот процесс не дифференцируем. Приближение белого шума справедливо, когда временной масштаб, характеризующий инерцию системы, намного превосходит время «жизни» энергоемких флуктуаций среды.

Флуктуации температуры в турбулентном потоке имеют конечное время вырождения автокорреляционной функции. Характерным временем жизни энергоемких флуктуаций температуры газа служит интегральный временной масштаб. В проблеме тепловой устойчивости частиц появляются три временных масштаба: характерное время роста температуры в результате химической реакции, время тепловой релаксации частиц и интегральный временной масштаб флуктуаций температуры газа. Учет временной структуры флуктуаций температуры газа (цветной шум) при воспламенении приводит к ряду принципиально новых эффектов, которые в литературе пока не изучены. В современных теоретических исследованиях показано, что действие цветного шума качественно изменяет характер поведения систем взрывного типа по сравнению с приближением белого шума [16–19]. Конечность времени вырождения корреляции случайных внешних параметров вызывает самоускоряющийся дрейф системы к критическим условиям начала взрыва.

План настоящего исследования соответствует изложенному в гл. 2 монографии [1] приближению стационарной теории теплового взрыва. Предполагается, что концентрация частиц достаточно мала, чтобы можно было пренебречь изменением концентрации реакционного газа. Частицы мелкие, поэтому распределения температуры и концентрации реагента внутри частицы рассматриваются в квазистационарном приближении. Основная цель работы — анализ влияния временной структуры флуктуаций температуры на процесс потери тепловой стабильности частиц с тепловыделением. Для упрощения анализа и иллюстрации новых физических эффектов флуктуации температуры газа вдоль траектории частицы считаются заданным случайным процессом с известной автокорреляционной функцией.

Методами функционального дифференцирования выведено замкнутое уравнение для функции плотности вероятности (ФПВ) случайной температуры частиц. Исследование влияния флуктуаций температуры газа на воспламенение частиц проводится на основе

сопряженной системы дифференциальных уравнений для осредненной температуры и дисперсии флуктуаций температуры частиц. Показано, что наличие флуктуаций температуры качественно меняют ситуацию по сравнению с детерминированным случаем. Вследствие взаимного влияния амплитуды флуктуаций температуры и осредненной температуры частиц реализуется самоускоряющийся дрейф температуры частиц к критическому значению, после которого наступает воспламенение. В детерминированной теории тепловой взрыв происходит только в случае, если начальная температура частиц превышает критическое значение. Во флуктуирующем поле температура частиц с течением времени достигает критического уровня даже при начальной температуре, при которой в детерминированном случае взрыв в принципе невозможен.

### 1. Критическая температура

Уравнение для температуры одиночной сферической частицы  $\Theta_p(t)$ , внутри которой проходит экзотермическая химическая брутто-реакция, а тепло с поверхности отводится за счет теплоотдачи, имеет вид

$$d\Theta_p(t)/dt = [\Theta_f(t) - \Theta_p(t)]/\tau_\theta + W_Q(\Theta_p(t)), \quad (1)$$

здесь  $\Theta_f(t)$  — случайная температура газа вдоль траектории частицы,  $W_Q(\Theta_p) = (QA/c_p) \exp(-E/R_u\Theta_p)$  — аппроксимация Аррениуса мощности тепловыделения в результате химической реакции,  $Q$  — тепловой эффект реакции,  $A$  — предэкспоненциальный множитель,  $E$  — энергия активации,  $R_u$  — универсальная газовая постоянная,  $c_p$  — теплоемкость материала частиц.

Время тепловой релаксации частиц  $\tau_\theta$  определяется как  $\tau_\theta = \frac{1}{6} \cdot \frac{\rho_p c_p}{\rho_f c_f} \cdot \frac{d_p^2}{\text{Nu}_p a_f}$ , здесь  $c_f$  — теплоемкость газа,  $\rho_p, \rho_f$  — плотности материала частиц и газа,  $d_p$  — диаметр частиц,  $a_f$  — коэффициент температуропроводности газа,  $\text{Nu}_p$  — критерий Нуссельта частиц.

После осреднения по ансамблю случайных реализаций температуры газа выделяются осредненная постоянная компонента  $\langle \Theta_f \rangle$  и флуктуации  $\theta_f(t)$  вдоль траектории частицы, которые считаются заданными следующим образом:  $\Theta_f(t) = \langle \Theta_f \rangle + \theta_f(t)$ ,  $\langle \theta_f(t) \rangle = 0$ . Угловыми скобками обозначается результат осреднения по ансамблю. Флуктуации температуры газа вдоль траектории частицы моделируются статистически стационарным случайным процессом.

Вначале на основе анализа на устойчивость к малым возмущениям приведем интерпретацию известных данных о тепловой стабильности в детерминированных условиях, когда температура газа является постоянной  $\Theta_f(t) = \langle \Theta_f \rangle$ . Стационарные температуры частицы  $\Theta_p^{\text{st}}$  находятся из уравнения

$$(\langle \Theta_f \rangle - \Theta_p^{\text{st}})/\tau_\theta + W_Q(\Theta_p^{\text{st}}) = 0. \quad (2)$$

Стационарная температура  $\Theta_p^{\text{st}}$  подвергается малым возмущениям  $\Theta_p(t) = \Theta_p^{\text{st}} + \delta\Theta_p(t)$ ,  $\Theta_p^{\text{st}} \gg \|\delta\Theta_p(t)\|$ , здесь  $\|\delta\Theta_p(t)\|$  — норма возмущения. В результате линеаризации мощности тепловыделения химической реакции

$$W_Q(\Theta_p^{\text{st}} + \delta\Theta_p(t)) \approx W_Q(\Theta_p^{\text{st}}) + dW_Q(\Theta_p)/d\Theta_p|_{\Theta_p=\Theta_p^{\text{st}}} \delta\Theta_p(t)$$

из (1) и (2) получается уравнение возмущения температуры и его решение

$$d\delta\Theta_p(t)/dt = -\mu(\Theta_p^{st})\delta\Theta_p(t), \quad \delta\Theta_p(t) = \delta\Theta_0 \exp\left[-\mu(\Theta_p^{st})t\right], \quad (3)$$

где  $\delta\Theta_0$  — начальный уровень возмущения температуры частицы. Показатель экспоненты в формулах (3) имеет вид

$$\mu(\Theta_p^{st}) = \frac{1}{\tau_\Theta} \left[ 1 - \tau_\Theta \left. \frac{dW_Q(\Theta_p)}{d\Theta_p} \right|_{\Theta_p = \Theta_p^{st}} \right] = \frac{1}{\tau_\Theta} \left[ 1 - \frac{\tau_\Theta}{\tau_Q(\Theta_p^{st})} \right], \quad (4)$$

здесь  $\tau_Q(\Theta_p)$  — характерное время роста температуры за счет экзотермической химической реакции. Для аппроксимации Аррениуса имеем

$$\tau_Q(\Theta_p) = \left[ \frac{dW_Q(\Theta_p)}{d\Theta_p} \right]^{-1} = \left\{ \frac{QA}{c_p \Theta_p} \cdot \frac{E}{R_u \Theta_p} \exp\left(-\frac{E}{R_u \Theta_p}\right) \right\}^{-1}. \quad (5)$$

Для быстрой химической реакции характерное время роста температуры за счет тепловыделения меньше времени тепловой релаксации частиц  $\tau_Q(\Theta_p^{st}) < \tau_\Theta$ . В этом случае показатель экспоненты отрицателен —  $\mu(\Theta_p^{st}) < 0$  и начальные возмущения при  $\delta\Theta_0 > 0$  нарастают. Для сравнительно медленной химической реакции  $\tau_Q(\Theta_p^{st}) > \tau_\Theta$ , показатель экспоненты положителен —  $\mu(\Theta_p^{st}) > 0$  и стационарное состояние по отношению к малым возмущениям устойчиво.

Границы существования стационарных состояний температуры частиц находятся из условий  $\mu(\Theta_p^{st}) = 0$ ,  $\tau_Q(\Theta_p^{st}) = \tau_\Theta$ , которые для аппроксимации Аррениуса (5) при-

водят к уравнению  $\frac{\tau_\Theta}{\Theta_p^{st}} \cdot \frac{QA}{c_p} \exp\left(-\frac{E}{R_u \Theta_p^{st}}\right) = \frac{R_u \Theta_p^{st}}{E}$ . Из полученного выражения совместно

с уравнением для стационарной температуры (2) можно записать известные из теории классического теплового взрыва [1–3] предельные стационарные температуры частиц:

$$\Gamma_p^{(1,2)} = \frac{E^* \pm \sqrt{E^*(E^* - 4)}}{2}, \quad (6)$$

здесь  $\Gamma_p = \Theta_p / \langle \Theta_f \rangle$  и  $E^* = E / (R_u \langle \Theta_f \rangle)$  — безразмерные температура частиц и энергия активации соответственно. Видно, что существование нескольких стационарных состояний возможно только для энергии активации  $E^* > 4$ .

Далее в качестве временного масштаба выбирается интегральный временной масштаб флуктуаций температуры газа  $T_\Theta$  (см. ниже). В этом случае безразмерный параметр тепловой инерции частиц  $\Omega_\Theta = \tau_\Theta / T_\Theta$ . Полученные из анализа малых возмущений результаты иллюстрирует классическая диаграмма Семенова. На диаграмме (см. рис. 1) показаны безразмерные мощности теплоотдачи  $W_\Omega^* = -(1 - \Gamma_p) / \Omega_\Theta$  и тепловыделения  $W_Q^* = Q^* \exp(-E^* / \Gamma_p)$ , где  $Q^* = QAT_\Theta / c_p \langle \Theta_f \rangle$  — безразмерный тепловой эффект реакции.

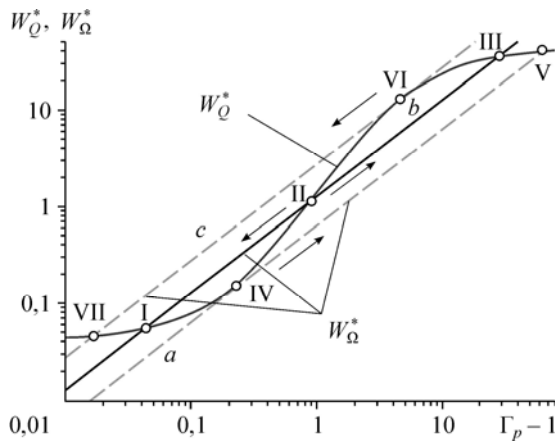


Рис. 1. Диаграмма Семенова при  $\Omega_\Theta = 0,8$ ,  $E^* = 7$ ,  $Q^* = 31$ .

Стационарные значения температуры I–VI обозначены точками; стрелками показано изменение температуры частиц; штриховые кривые проходят через касательные точки с координатами, найденными по формуле (6).

Точки пересечения линий  $W_Q^*$  и  $W_\Omega^*$  являются решениями уравнения (2). Область трех стационарных значений температуры ограничена касательными  $a$  и  $c$ , которые проходят через точки с координатами, рассчитанными по формуле (6). Внутри этой области корни I и III являются устойчивыми. На рис. 2 представлены результаты численного интегрирования уравнения (1);  $\xi^*$  — отношение текущего времени к общему периоду интегрирования. Если начальные температуры частицы лежат ниже температуры I или выше нее, но ниже температуры II, то конечная температура частицы будет равна температуре I. Для начальной температуры частицы выше второго корня II или третьего корня III стационарное значение температуры будет совпадать с третьим корнем. На касательной  $a$  корень IV является неустойчивым, малое превышение начальной температуры стационарного значения IV приводит к тепловому взрыву. Корень VI также неустойчив, малейшее снижение ниже температуры VI вызывает резкое уменьшение температуры.

Таким образом, температура  $\Theta_{cr} = \Theta_{II}$ , совпадающая со вторым корнем на диаграмме Семенова, будет считаться критической. Малейшее превышение этой температуры (в безразмерном виде  $\Gamma_{cr} = \Gamma_{II} = \Theta_{II} / \langle \Theta_f \rangle$ ) приведет к воспламенению, после которого температура частиц быстро достигнет значения  $\Gamma_{III} = \Theta_{III} / \langle \Theta_f \rangle$ .

Здесь эти известные из литературы данные получены в рамках исследования на устойчивость к малым возмущениям и представлены с целью иллюстрации критического значения температуры воспламенения и сравнения с новыми результатами, которые будут приведены ниже при выводе замкнутого уравнения для ФПВ.

## 2. Уравнение для функции плотности вероятности температуры частиц

Вывод уравнения для ФПВ температуры частиц основан на технологии, изложенной, например, в работе [20]. Определяется характеристическая функция

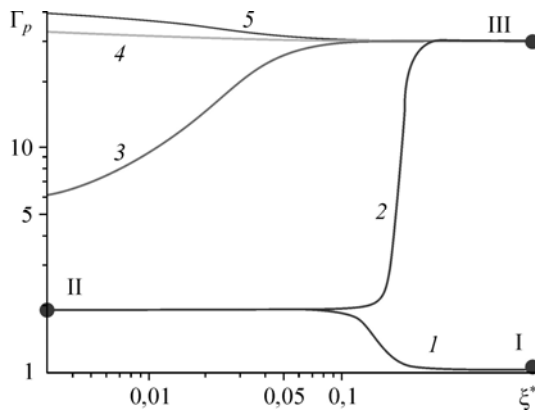


Рис. 2. Траектории температуры частиц, выходящих на стационарные значения корней на диаграмме Семенова.

1–5 — различные траектории в пространстве температур.

температуры частиц  $\varphi(\Theta_p, t)$ , вырезающая случайную траекторию в пространстве температур:  $\varphi(\Theta_p, t) = \delta(\Theta_p - \Theta_p(t))$ , здесь  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  $\Theta_p$  — координата в фазовом пространстве.

Замкнутое уравнение для характеристической функции получается с учетом уравнения динамики температуры частиц (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\Theta_p, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \Theta_p} \left\{ \delta(\Theta_p - \Theta_p(t)) \frac{d\Theta_p}{dt} \right\} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \Theta_p} \left\{ \left[ \frac{\Theta_f(t) - \Theta_p}{\tau_\Theta} + \frac{QA}{c_p} \exp\left(-\frac{E}{R_u \Theta_p}\right) \right] \varphi(\Theta_p, t) \right\}. \end{aligned}$$

Осреднение по ансамблю реализаций характеристической функции  $\varphi(\Theta_p, t)$  приводит к ФПВ температуры частиц:

$$\Phi(\Theta_p, t) = \langle \delta(\Theta_p - \Theta_p(t)) \rangle = \langle \varphi(\Theta_p, t) \rangle, \quad \int_0^\infty \Phi(\Theta_p, t) d\Theta_p \equiv 1.$$

Уравнение для ФПВ является незамкнутым:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\Theta_p, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \Theta_p} \left\{ \left[ \frac{\langle \Theta_f \rangle - \Theta_p}{\tau_\Theta} + \frac{QA}{c_p} \exp\left(-\frac{E}{R_u \Theta_p}\right) \right] \Phi(\Theta_p, t) \right\} = \\ = -\frac{1}{\tau_\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta_p} \langle \theta_f(t) \varphi(\Theta_p, t) \rangle. \end{aligned}$$

Слагаемые в левой части уравнения представляют нестационарность и изменение температуры частиц в результате теплообмена с газом и тепловыделения в ходе экзотермической химической реакции. Правая часть уравнения описывает эффект генерации флуктуаций температуры вследствие теплового взаимодействия частиц со случайной температурой газа. Для замыкания уравнения для ФПВ необходимо раскрыть корреляцию флуктуаций температуры газа и индикаторной функции.

Полагаем, что флуктуации температуры газа вдоль траектории частицы являются статистически стационарным случайным процессом Гаусса. Это приближение подтверждается экспериментальными наблюдениями (см., например, работу [21]) и данными прямого численного моделирования. Для случайного процесса Гаусса при раскрытии корреляции  $\langle \theta_f(t) \varphi(\Theta_p, t) \rangle$  привлекается формула Фурутсу–Новикова [20, 22]

$$\langle \theta_f(t) \varphi(\Theta_p, t) \rangle = \int_0^t \langle \theta_f(t) \theta_f(\xi) \rangle \left\langle \frac{\delta \varphi(\Theta_p, t)}{\delta \theta_f(\xi)} \right\rangle d\xi,$$

здесь  $\delta \varphi(\Theta_p, t) / \delta \theta_f(s)$  — функциональная производная, вычисление которой будет описано ниже. Вследствие статистической стационарности флуктуаций температуры корреляция флуктуаций температуры газа зависит от разности времен  $\langle \theta_f(t) \theta_f(\xi) \rangle = \langle \theta_f^2 \rangle \Psi_f(t - \xi)$ , где  $\langle \theta_f^2 \rangle$  — дисперсия флуктуаций,  $\Psi_f(t)$  — автокорреляционная функция на траектории частицы. Интегральный временной масштаб автокорреляционной функции флуктуации температуры газа определяется как  $T_\Theta = \int_0^\infty \Psi_f(s) ds$ .

С учетом сделанных предположений корреляция флуктуаций температуры газа и индикаторной функции принимает вид

$$\langle \theta_f(t) \varphi(\Theta_p, t) \rangle = \langle \theta_f^2 \rangle \int_0^t \Psi_f(t-\xi) \left\langle \frac{\delta \varphi(\Theta_p, t)}{\delta \theta_f(\xi)} \right\rangle d\xi. \quad (7)$$

Основной вклад в корреляцию сосредоточен на временном интервале  $t - \xi \approx T_\Theta$ . Функциональная производная от индикаторной функции равна

$$\frac{\delta \varphi(\Theta_p, t)}{\delta \theta_f(\xi)} = -\frac{\partial}{\partial \Theta_p} \left[ \varphi(\Theta_p, t) \frac{\delta \Theta_p(t)}{\delta \theta_f(\xi)} \right].$$

Для расчета функциональной производной от температуры частиц переходим к интегральной форме уравнения (1)

$$\Theta_p(t) = \frac{1}{\tau_\Theta} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_\Theta}\right) \left\{ \Theta_f(s) + \tau_\Theta W_Q(\Theta_p(s)) \right\} ds.$$

В результате применения операции функционального дифференцирования  $\delta/\delta\theta_f(\xi)$  [20, 22] получаем интегральное уравнение для функциональной производной от актуальной температуры частиц

$$\frac{\delta \Theta_p(t)}{\delta \theta_f(\xi)} = \frac{1}{\tau_\Theta} \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_\Theta}\right) + \int_\xi^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_\Theta}\right) \frac{dW_Q(\Theta_p)}{d\Theta_p} \Big|_{\Theta_p=\Theta_p(s)} \frac{\delta \Theta_p(s)}{\delta \theta_f(\xi)} ds. \quad (8)$$

Значение нижнего предела в интеграле устанавливается исходя из принципа физической причинности: флуктуации температуры частиц следуют за флуктуациями температуры газа. При  $\xi \rightarrow t$  имеем следующее выражение:

$$\delta \Theta_p(t) / \delta \theta_f(t) = 1/\tau_\Theta. \quad (9)$$

Формула (9) соответствует приближению белого шума для флуктуаций температуры газа.

В общем случае представления флуктуаций температуры газа цветным шумом вычисление функциональной производной реализуется методом, предложенным в работе [16]. В результате дифференцирования выражения (8) по времени  $t$  получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\delta \Theta_p(t)}{\delta \theta_f(\xi)} = -\frac{1}{\tau_\Theta} \mu(\Theta_p(t)) \frac{\delta \Theta_p(t)}{\delta \theta_f(\xi)}, \quad (10)$$

здесь показатель  $\mu(\Theta_p)$  равен

$$\mu(\Theta_p) = \frac{1}{\tau_\Theta} \left[ 1 - \tau_\Theta \frac{dW_Q(\Theta_p)}{d\Theta_p} \right] = \frac{1}{\tau_\Theta} \left[ 1 - \frac{\tau_\Theta}{\tau_Q(\Theta_p)} \right]. \quad (11)$$

Видно, что показатель  $\mu(\Theta_p)$  совпадает с полученным ранее выражением (4), найденным для принципиально другой проблемы. Решение уравнения (10) с учетом начального условия (9) записывается как

$$\frac{\delta \Theta_p(t)}{\delta \theta_f(\xi)} = \frac{1}{\tau_\Theta} \exp\left[-\int_\xi^t \mu(\Theta_p(s)) ds\right].$$

Настоящая работа посвящена изучению дрейфа температуры частиц к критическому значению начала теплового взрыва. В этом диапазоне температур мощность тепловыделения в результате экзотермических химических реакций значительно меньше, чем в области температур устойчивого горения. Поэтому в дальнейшем полагается, что за время порядка интегрального временного масштаба  $T_\Theta$  температура частиц меняется незначительно и интеграл в экспоненте можно оценить по актуальной температуре  $\Theta_p(t)$ . Выражение для функциональной производной температуры частиц принимает вид

$$\frac{\delta\Theta_p(t)}{\delta\theta_f(\xi)} = \frac{1}{\tau_\Theta} \exp[-\mu(\Theta_p)(t-\xi)].$$

Функциональная производная характеристической функции равна

$$\frac{\delta\varphi(\Theta_p, t)}{\delta\theta_f(\xi)} = -\frac{\partial}{\partial\Theta_p} \left\{ \frac{1}{\tau_\Theta} \exp[-\mu(\Theta_p)(t-\xi)] \varphi(\Theta_p, t) \right\}.$$

В результате подстановки этого выражения в формулу (7) получаем представление для корреляции флуктуаций температуры газа и индикаторной функции, которое приводит к замкнутому уравнению для ФПВ актуальной температуры частиц

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi(\Theta_p, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\Theta_p} \left\{ \left[ \frac{\langle\Theta_f\rangle - \Theta_p}{\tau_\Theta} + \frac{QA}{c_p} \exp\left(-\frac{E}{R_u\Theta_p}\right) \right] \Phi(\Theta_p, t) \right\} = \\ = \frac{\langle\theta_f^2\rangle}{\tau_\Theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\Theta_p^2} [f_\Theta(\Theta_p, t)\Phi(\Theta_p, t)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (12) — прямое уравнение Колмогорова и является аналогом уравнения Фоккера–Планка [23] для случайной температуры частиц с тепловыделением. Слагаемые в левой части уравнения (12) описывают эффекты нестационарности и дрейфа ФПВ температуры частиц в фазовом пространстве. Правая часть уравнения (12) представляет диффузию плотности вероятности с неоднородным нестационарным коэффициентом диффузии в фазовом пространстве температур. В уравнении (12) функция отклика температуры частиц на флуктуации температуры газа имеет вид

$$f_\Theta(\Theta_p, t) = \frac{1}{\tau_\Theta} \int_0^t \Psi_f(\xi) \exp[-\mu(\Theta_p)\xi] d\xi. \quad (13)$$

Анализ функции отклика проводится при экспоненциальной аппроксимации автокорреляционной функции флуктуаций температуры газа  $\Psi_f(\xi) = \exp(-\xi/T_\Theta)$ . Экспоненциальное затухание корреляционной функции соответствует поведению флуктуаций на энергоемких масштабах [21]. Для частиц без химической реакции ( $\mu(\Theta_p) = \tau_\Theta^{-1}$ ) для достаточно большого времени наблюдения  $t \gg (\tau_\Theta, T_\Theta)$  из формулы (13) вытекает выражение для функции отклика  $f_\Theta = (1 + \Omega_\Theta)^{-1}$ , зависящей только от параметра тепловой инерции частиц (см., например, [24]). При выполнении неравенства  $\tau_\Theta \gg T_\Theta$  функция отклика  $f_\Theta = T_\Theta/\tau_\Theta = \Omega_\Theta^{-1} \ll 1$  соответствует дельта-коррелированному во времени процессу флуктуаций температуры газа. Отметим также, что при аппроксимации флуктуаций температуры газа белым шумом функция отклика (13) даже с экзотермической реакцией не зависит от мощности тепловыделения.



Временная структура корреляции случайной температуры газа качественно меняет ситуацию. Для экспоненциального затухания корреляции температуры газа функция отклика (13) равна

$$f_{\Theta}(\Theta_p, t) = \left[ 1 + \frac{\tau_{\Theta}}{T_{\Theta}} \left( 1 - \frac{T_{\Theta}}{\tau_Q} \right) \right]^{-1} \left\{ 1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\tau_{\Theta}} \left[ 1 + \frac{\tau_{\Theta}}{T_{\Theta}} \left( 1 - \frac{T_{\Theta}}{\tau_Q} \right) \right] \right\} \right\}. \quad (14)$$

Выделяются два случая. В первом случае, когда рассчитывается только динамика пересечения температурой частиц критического значения  $\Theta_{II}$ , выполняется неравенство  $1 + \tau_{\Theta}/T_{\Theta} (1 - T_{\Theta}/\tau_Q) > 0$ , и в выражении (14) можно перейти к пределу  $t \rightarrow \infty$ , тогда

$$f_{\Theta}^0(\Theta_p) = \left\{ 1 + \Omega_{\Theta} \left[ 1 - \frac{T_{\Theta}}{\tau_Q(\Theta_p)} \right] \right\}^{-1}. \quad (15)$$

Из формулы (15) следует, что для частиц с малой тепловой инерцией ( $\Omega_{\Theta} \rightarrow 0$ ) влияние флуктуаций температуры газа на тепловые параметры частиц исчезает. Для частиц со значительной тепловой инерцией ( $\Omega_{\Theta} \gg 1$ ) влияние флуктуаций температуры газа также ослабевает. Для медленной химической реакции, когда характерное время роста температуры частиц вследствие химической реакции больше интегрального временного масштаба ( $\tau_Q > T_{\Theta}$ ), интенсивность флуктуаций температуры частиц определяется их тепловой инерцией.

Во втором случае, при быстрой химической реакции ( $\tau_Q \gg T_{\Theta}$ ), показатель экспоненты в формуле (14) может принимать отрицательные значения —  $1 + \tau_{\Theta}/T_{\Theta} (1 - T_{\Theta}/\tau_Q) < 0$ . Это свидетельствует об интенсивной дополнительной генерации флуктуаций температуры частиц вследствие колебаний скорости химической реакции. В этом случае необходимо учитывать зависимость функции отклика от времени. Второй случай, как правило, реализуется при исследовании динамики изменения температуры частиц вплоть до температуры горения  $\Theta_{III}$ .

### 3. Уравнения для моментов

ФПВ содержит всю информацию о температуре частиц. Дальнейший анализ проводится на основе системы уравнений для моментов, следующих из уравнения (12). Метод моментов активно используется в исследованиях для описания нестационарных эффектов в случае цветного шума [19]. Первый и второй моменты ФПВ представляют осредненную температуру и дисперсию температуры частиц. Осредненная температура частиц записывается в следующем виде:

$$\int_0^{\infty} \Theta_p \Phi(\Theta_p, t) d\Theta_p = \int_0^{\infty} \Theta_p \langle \delta(\Theta_p - \Theta_p(t)) \rangle d\Theta_p = \langle \Theta_p(t) \rangle.$$

Флуктуации температуры частиц  $\theta_p = \Theta_p - \langle \Theta_p(t) \rangle$  при осреднении по ансамблю реализаций исчезают:

$$\langle \theta_p \rangle = \int_0^{\infty} \theta_p \Phi(\Theta_p) d\Theta_p = \int_0^{\infty} [\Theta_p - \langle \Theta_p(t) \rangle] \Phi(\Theta_p) d\Theta_p = 0.$$

Дисперсию флуктуаций температуры частиц можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle \theta_p^2 \rangle &= \int_0^\infty \theta_p^2 \Phi(\Theta_p) d\Theta_p = \int_0^\infty [\Theta_p - \langle \Theta_p(t) \rangle]^2 \langle \delta(\Theta_p - \langle \Theta_p(t) \rangle) \rangle d\Theta_p = \\ &= \langle \Theta_p^2(t) \rangle - \langle \Theta_p(t) \rangle^2. \end{aligned}$$

С целью получения уравнений для моментов переходим к новой переменной — флуктуации температуры частиц. ФПВ в этом случае преобразуется к виду

$$\Phi(\Theta_p, t) \Rightarrow \Phi(\theta_p, t) = \Phi(\Theta_p - \langle \Theta_p(t) \rangle, t).$$

Уравнение для ФПВ в новых переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\theta_p, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta_p} \left\{ \left[ -\frac{d\langle \Theta_p(t) \rangle}{dt} + \frac{\langle \Theta_f(t) \rangle - \langle \Theta_p(t) \rangle}{\tau_\Theta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{QA}{c_p} \exp\left(-\frac{E}{R_u \langle \Theta_p(t) \rangle}\right) \exp\left(\frac{E}{R_u \langle \Theta_p(t) \rangle} \cdot \frac{\theta_p / \langle \Theta_p(t) \rangle}{1 + \theta_p / \langle \Theta_p(t) \rangle}\right) \right] \Phi(\theta_p, t) \right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial \theta_p} \left[ \frac{\theta_p}{\tau_\Theta} \Phi(\theta_p, t) \right] + \frac{\langle \theta_f^2 \rangle}{\tau_\Theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta_p^2} [f_\Theta(\theta_p, t) \Phi(\theta_p, t)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение для осредненной температуры выводится путем интегрирования уравнения (16) по переменной  $\theta_p$  в пределах  $-\infty < \theta_p < \infty$ . На бесконечности  $\theta_p \rightarrow \pm\infty$  принимаются условия  $\Phi(\theta_p, t) \rightarrow 0$  и  $\partial\Phi(\theta_p, t)/\partial\theta_p \rightarrow 0$ . Уравнение для осредненной температуры частиц имеет вид

$$\frac{d\langle \Theta_p(t) \rangle}{dt} = \frac{\langle \Theta_f \rangle - \langle \Theta_p(t) \rangle}{\tau_\Theta} + \frac{QA}{c_p} \langle S(t) \rangle \exp\left(-\frac{E}{R_u \langle \Theta_p(t) \rangle}\right). \quad (17)$$

Здесь множитель  $\langle S(t) \rangle$  учитывает влияние флуктуаций температуры частиц на наблюдаемую скорость химической реакции

$$\begin{aligned} \langle S(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\theta_p, t) \Phi(\theta_p, t) d\theta_p, \\ S(\theta_p, t) &= \exp\left(\frac{E}{R_u \langle \Theta_p(t) \rangle} \cdot \frac{\theta_p / \langle \Theta_p(t) \rangle}{1 + \theta_p / \langle \Theta_p(t) \rangle}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Умножаем уравнение (16) на функцию  $\theta_p^2$  и интегрируем по пространству  $-\infty < \theta_p < \infty$ . В результате получаем уравнение для дисперсии флуктуаций температуры частиц

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \theta_p^2(t) \rangle}{dt} &= \frac{2}{\tau_\Theta} \left\{ \langle \theta_f^2 \rangle \langle f_\Theta(t) \rangle + \right. \\ &+ \tau_\Theta \frac{QA}{c_p} \exp\left(-\frac{E}{R_u \langle \Theta_p(t) \rangle}\right) \left\langle \theta_p \exp\left(\frac{E}{R_u \langle \Theta_p(t) \rangle} \cdot \frac{\theta_p / \langle \Theta_p(t) \rangle}{1 + \theta_p / \langle \Theta_p(t) \rangle}\right) \right\rangle - \langle \theta_p^2(t) \rangle \left. \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Осредненная функция отклика  $\langle f_{\Theta}(t) \rangle$  зависит от осредненной температуры и флуктуаций температуры частиц (см. формулу (13))

$$\begin{aligned} \langle f_{\Theta}(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Theta}(\theta_p, t) \Phi(\theta_p, t) d\theta_p = \\ &= \frac{1}{\tau_{\Theta}} \int_0^t \Psi_f(\xi) \langle \exp[-\mu(\langle \Theta_p \rangle + \theta_p) \xi] \rangle d\xi. \end{aligned}$$

Осредненная экспонента записывается в виде

$$\langle \exp[-\mu(\langle \Theta_p \rangle + \theta_p) \xi] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\mu(\langle \Theta_p \rangle + \theta_p) \xi] \Phi(\theta_p, \xi) d\theta_p.$$

Из последней формулы следует, что отклик температуры частиц зависит не только от их тепловой инерции, но и от мощности тепловыделения как функции осредненной температуры. Из уравнений (17) и (19) видно, что осредненная температура и интенсивность флуктуаций температуры частиц являются сопряженными параметрами. Рост осредненной температуры увеличивает дисперсию температуры частиц, которая, в свою очередь вызывает увеличение скорости химической реакции и приводит к дальнейшему разогреву частиц.

Отметим, что при аппроксимации флуктуации температуры газа белым шумом функция отклика в уравнении (19) может быть использована только при значениях параметра тепловой инерции  $\Omega_{\Theta} \gg 1$ ,  $\langle f_{\Theta} \rangle = \Omega_{\Theta}^{-1}$ . Это ограничение существенно снижает уровень температурных флуктуаций частиц и нивелирует взаимосвязь осредненной температуры частиц и ее дисперсии.

#### 4. Безразмерная форма уравнений для моментов

Целью настоящей работы является анализ действий двух механизмов возникновения флуктуаций температуры частиц. Во-первых, это флуктуации температуры газа. Без экзотермической химической реакции температура частиц также имеет случайный характер. Дисперсия флуктуаций температуры частиц в этом случае зависит от отношения времени тепловой релаксации  $\tau_{\Theta}$  и интегрального временного масштаба автокорреляционной функции газа  $T_{\Theta}$ . Во-вторых, температура частиц изменяется в результате колебаний скорости химической реакции. В связи с этим выбран временной масштаб, равный «времени жизни» энергоемких флуктуаций температуры газа. Последнее обусловлено монотонным дрейфом температуры частицы к критическим условиям в результате изменения скорости химической реакции за время порядка  $T_{\Theta}$ . Таким образом,  $\xi = t/T_{\Theta}$  — безразмерное время.

Переходим к безразмерной форме уравнений для моментов. Безразмерные флуктуации температуры частиц  $\gamma_p = \theta_p / \langle \Theta_f \rangle$ , безразмерная энергия активации  $E^* = E/R_u \langle \Theta_f \rangle$  и безразмерный тепловой эффект реакции  $Q^* = QAT_{\Theta}/c_p \langle \Theta_f \rangle$ . Безразмерный характерный временной масштаб роста температуры частиц в результате химической реакции по закону Аррениуса запишется следующим образом:

$$\tau_Q^*(\Gamma_p) = \frac{\tau_Q(\Theta_p)}{T_{\Theta}} = \left\{ \frac{Q^* E^*}{\Gamma_p^2} \exp\left(-\frac{E^*}{\Gamma_p}\right) \right\}^{-1}.$$

Амплитуда флуктуаций температуры частиц существенно ниже, чем их абсолютная температура  $\langle \theta_p^2 \rangle^{1/2} \ll \langle \Theta_p \rangle$ . В этом случае в уравнении (18) для множителя  $S(\theta_p, t)$  в скорости наблюдаемой химической реакции получим

$$S(\theta_p, t) \approx \exp\left(\frac{E}{R_u \langle \Theta_p(t) \rangle} \cdot \frac{\theta_p}{\langle \Theta_p(t) \rangle}\right).$$

Флуктуации температуры частиц аппроксимируются случайным процессом Гаусса с ФПВ:

$$\Phi(\theta_p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \theta_p^2(t) \rangle}} \exp\left(-\frac{\theta_p^2}{2 \langle \theta_p^2(t) \rangle}\right).$$

Осредненное значение  $S(\theta_p, t)$  по функции плотности вероятности Гаусса приводит к выражению

$$\langle S(t) \rangle = \exp\left[\frac{1}{2} \left(\frac{E}{R_u \langle \Theta_p(t) \rangle}\right)^2 \frac{\langle \theta_p^2(t) \rangle}{\langle \Theta_p(t) \rangle^2}\right].$$

Корреляцию в правой части уравнения (19) для процесса Гаусса можно записать в виде

$$\left\langle \theta_p \exp\left(\frac{E}{R_u \langle \Theta_p(t) \rangle} \cdot \frac{\theta_p}{\langle \Theta_p(t) \rangle}\right) \right\rangle = \frac{E}{R_u \langle \Theta_p(t) \rangle} \cdot \frac{\langle \theta_p^2 \rangle}{\langle \Theta_p(t) \rangle} \langle S(t) \rangle.$$

С учетом полученных выражений система уравнений для безразмерной осредненной температуры и дисперсии температуры частиц будет иметь вид

$$\frac{d \langle \Gamma_p(\xi) \rangle}{d\xi} = \frac{1 - \langle \Gamma_p(\xi) \rangle}{\Omega_\Theta} + Q^* \langle S(\xi) \rangle \exp\left(-\frac{E^*}{\langle \Gamma_p(\xi) \rangle}\right), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \gamma_p^2(\xi) \rangle}{d\xi} &= \frac{2}{\Omega_\Theta} \left\{ \langle \gamma_p^2 \rangle \langle f_\Theta(\xi) \rangle - \right. \\ &\left. - \left[ 1 - \Omega_\Theta \frac{Q^* E^*}{\langle \Gamma_p(\xi) \rangle^2} \langle S(\xi) \rangle \exp\left(-\frac{E^*}{\langle \Gamma_p(\xi) \rangle}\right) \right] \langle \gamma_p^2(\xi) \rangle \right\}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\langle S(\xi) \rangle = \exp\left[\frac{1}{2} \left(\frac{E^*}{\langle \Gamma_p(\xi) \rangle}\right)^2 \frac{\langle \gamma_p^2(\xi) \rangle}{\langle \Gamma_p(\xi) \rangle^2}\right].$$

Начальные условия соответствуют детерминированной температуре частиц  $\langle \Gamma_p(0) \rangle = \Gamma_p^0$ ,  $\langle \gamma_p^2(0) \rangle = 0$ .

Функция отклика в безразмерной форме имеет вид

$$\langle f_\Theta(\xi) \rangle = \frac{1}{1 + \Omega_\Theta (1 - 1/\tau_Q^*)} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\xi}{\Omega_\Theta} \left[ 1 + \Omega_\Theta \left( 1 - \frac{1}{\tau_Q^*} \right) \right] \right] \right\}. \quad (22)$$

Из уравнения (21) видно, что существенный вклад в дисперсию флуктуаций температуры частиц вносит корреляция между случайными колебаниями температуры и скоростью химической реакции частицы (последнее слагаемое в правой части (21)).

### 5. Результаты расчетов

Рассмотрим сценарии теплового взрыва в зависимости от параметров тепловой инерции  $\Omega_{\Theta}$  и безразмерной амплитуды флуктуаций температуры среды  $\langle \gamma_f^2 \rangle^{1/2}$ . Расчеты проводились при следующих значениях безразмерной энергии активации и тепловыделения:  $E^* = 7$ ,  $Q^* = 31$ .

Функция отклика частиц (14) немонотонным образом зависит от температуры (см. рис. 3). При температуре в районе критической функция отклика имеет максимум. Вблизи критической температуры она может быть существенно выше единицы, что свидетельствует о дополнительной генерации флуктуаций температуры частиц вследствие колебаний скорости химической реакции. При аппроксимации флуктуаций температуры газа белым шумом функция отклика всегда меньше единицы. Функция отклика также немонотонным образом зависит от параметра тепловой инерции (см. рис. 4). Для частиц с малой тепловой инерцией ( $\Omega_{\Theta} \rightarrow 0$ ) функция отклика стремится к единице. С ростом параметра тепловой инерции после прохождения максимального значения, величина которого зависит от температуры частицы, функция отклика монотонно снижается.

Флуктуации температуры по сравнению с детерминированными условиями качественно меняют динамику воспламенения частиц. Корреляция флуктуации температуры и скорости химической реакции частиц приводит к дополнительной генерации флуктуаций температуры частиц. Реализуется дрейф температуры частиц к условию возникновения теплового взрыва.

Рисунок 5 иллюстрирует динамику изменения осредненной температуры и дисперсии температуры частиц. Начальная температура частиц совпадает с температурой газа. Видно, что с течением времени осредненная температура частиц пересечет критическое значение и произойдет их воспламенение (рис. 5a). Вблизи температуры воспламенения наблюдается

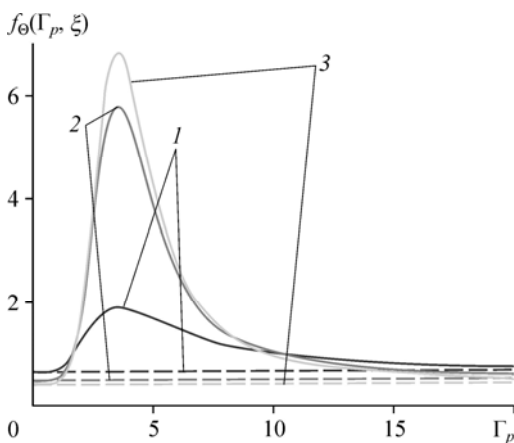


Рис. 3. Зависимость функции отклика частиц от безразмерной температуры при  $\xi = 5$ .

$\Omega_{\Theta} = 0,5$  (1), 1 (2), 1,3 (3);

штриховые линии — расчеты без учета тепловыделения.

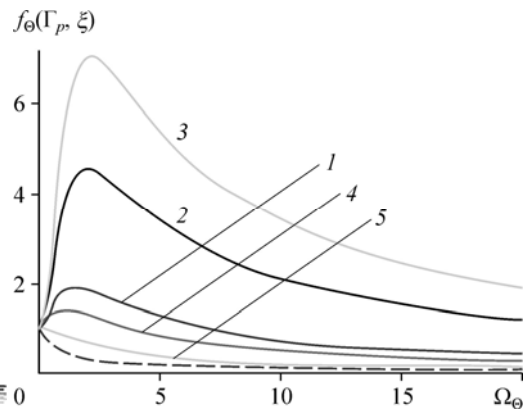


Рис. 4. Зависимость функции отклика частиц от параметра тепловой инерции при различных значениях безразмерной температуры.

$\Gamma_p = 2$  (1), 4 (2), 5 (3), 8 (4), 12 (5);

штриховые линии — расчеты без учета тепловыделения;

$\Omega_{\Theta} = 0,5$  (1), 1 (2), 1,3 (3).

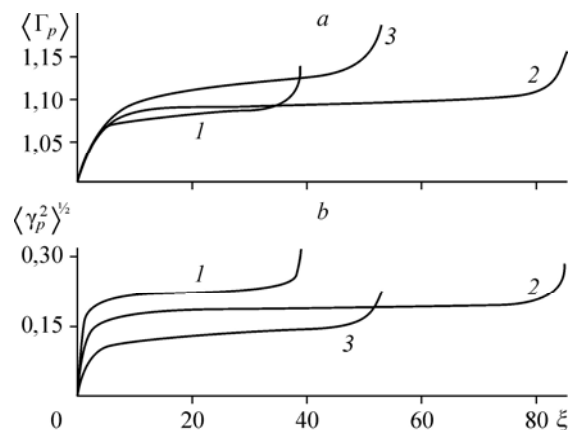


Рис. 5. Зависимость безразмерных температуры (а) и амплитуды флуктуаций температуры частиц (b) от безразмерного времени.  
 1 —  $\Omega_\Theta = 1,5$ ,  $\sigma_f = 10\%$ , 2 —  $\Omega_\Theta = 1$ ,  $\sigma_f = 12\%$ , 3 —  $\Omega_\Theta = 0,7$ ,  $\sigma_f = 15\%$ .

существенный рост амплитуды флуктуаций температуры частиц  $\langle \gamma_p^2 \rangle^{1/2}$  (рис. 5b). Отметим, что с точки зрения детерминированной теории воспламенение при начальной температуре, изображенной на рис. 5a, невозможно (см. для сравнения рис. 2).

### Заключение

Исследовано влияние цветного шума, моделирующего флуктуации температуры газа вдоль траектории частиц, на тепловую стабильность мелких частиц с гетерогенной экзотермической химической реакцией. Современными методами функционального анализа получено замкнутое уравнение для ФПВ флуктуации температуры частиц. Динамика воспламенения исследуется на основе системы обыкновенных дифференциальных уравнений для осредненной температуры и дисперсии температуры частиц.

Показано, что при использовании приближения белого шума для моделирования флуктуации температуры газа исчезает ряд принципиальных эффектов, связанных с развитием теплового взрыва. Временная структура корреляции флуктуации температуры газа обуславливает самоускоряющийся дрейф температуры частиц к критическому значению, после которого частицы воспламеняются. Критический уровень температуры устанавливается на основе классической диаграммы Семенова.

### Обозначения

$A$  — предэкспоненциальный множитель в зависимости Аррениуса,  
 $a_f$  — коэффициент температуропроводности газа,  
 $c_p, c_f$  — теплоемкости материала частиц и газа,  
 $d_p$  — диаметр частиц,  
 $\Gamma, \gamma$  — безразмерные температура и ее флуктуации,  
 $\delta(x)$  — дельта функция Дирака,  
 $\Theta, \theta$  — абсолютная температура и ее флуктуации,  
 $\mu$  — инкремент роста температуры,  
 $\rho$  — плотность,  
 $\Phi, \varphi$  — ФПВ и индикаторная функция,

$E$  — энергия активации,  
 $Nu_p$  — критерий Нуссельта частиц,  
 $Q$  — тепловой эффект реакции,  
 $R_u$  — универсальная газовая постоянная,  
 $T_\Theta$  — интегральный временной масштаб,  
 $W$  — мощность,  
 $\tau_\Theta$  — время тепловой релаксации,  
 $\tau_Q$  — характерное время роста температуры за счет химической реакции,  
 $\Psi$  — автокорреляционная функция,  
 $\Omega_\Theta$  — параметр тепловой инерции.

### Индексы

p — частицы,  
 f — газ,

$\langle \dots \rangle$  — осреднение по ансамблю.

## Список литературы

1. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
2. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987. 502 с.
3. Варнатц Ю., Маас У., Диббл Р. Горение. Физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образование загрязняющих веществ. М.: Физматлит, 2003. 352 с.
4. Тихонов В.И., Хименко В.И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970. 305 с.
5. Линдбеттер М., Линдгрэн Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989. 392 с.
6. Какас С., Вон В. A review of two-phase flow dynamic instabilities in tube boiling systems // Int. J. Heat Mass Transfer. 2008. Vol. 51. P. 399–433.
7. Fischer-Tropsch Technology. Ser.: Studies in Surface Science and Catalysis. / Eds. A.P. Steynberg, M.E. Dry. Amsterdam: Elsevier, 2004. Vol. 152. 722 p.
8. Хортстемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии, биологии. М.: Мир, 1987. 400 с.
9. Гарднер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 528 с.
10. Jenkins A. Self-oscillation // Physics Reports. 2013. V. 525. P. 167–222.
11. Мержанов А.Г., Руманов Э.Н. Нелинейные эффекты в макроскопической кинетике // Успехи физических наук. 1987. Т. 151, № 4. С. 553–593.
12. Lindnera V., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems // Physics Reports. 2004. Vol. 392. P. 321–424.
13. Федотов С.П., Третьяков М.В. Стационарные режимы гетерогенной химической реакции при наличии внешних шумов // Химическая физика. 1988. Т. 7, № 11. С. 1533–1537.
14. Федотов С.П., Третьяков М.В. О стохастическом воспламенении частицы // Химическая физика. 1991. Т. 10, № 2. С. 238–241.
15. Медведев В.Г., Телегин В.Г., Телегин Г.Г. Статистический анализ кинетики адиабатического теплового взрыва // Физика горения и взрыва. 2009. Т. 45, № 3. С. 44–48.
16. Liang G.Y., Cao L., Wu D.J. Approximate Fokker–Planck equation of system driven by multiplicative colored noises with colored cross-correlation // Physica A. 2004. Vol. 335. P. 371–384.
17. Hasegawa H. Dynamics of the Langevin model subjected to colored noise: functional-integral method // Physica A. 2008. V. 387. P. 2697–2718.
18. Zhang H., Xu W., Xu Y. The study on a stochastic system with non-Gaussian noise and Gaussian colored noise // Physica A. 2009. Vol. 388. P. 781–788.
19. Hasegawa H. A moment approach to non-Gaussian colored noise // Physica A. 2007. Vol. 384. P. 241–258.
20. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 335 с.
21. Wetchagaruna S., Riley J.J. Dispersion and temperature statistics of inertial particles in isotropic turbulence // Phys. Fluids. 2010. Vol. 22. P. 063301-1–063301-15.
22. Fox R.F. Functional-calculus approach to stochastic differential equations // Physical Review A. 1986. Vol. 33, No. 1. P. 467–476.
23. Risken H. The Fokker-Planck equation. Springer, 1984. 502 p.
24. Терехов В.И., Пахомов М.А. Тепломассоперенос и гидродинамика в газокпельных потоках. Новосибирск: НГТУ, 2008. 284 с.

*Статья поступила в редакцию 10 декабря 2015 г.,  
после доработки — 19 апреля 2016 г.*