



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Абалакин, Т. К. Козубская, Схема на основе реберно-ориентированной квазиодномерной реконструкции переменных для решения задач аэродинамики и аэроакустики на неструктурированных сетках, *Матем. моделирование*, 2013, том 25, номер 8, 109–136

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 217.9.82.130

2 декабря 2016 г., 10:16:43



**СХЕМА НА ОСНОВЕ РЕБЕРНО-ОРИЕНТИРОВАННОЙ  
КВАЗИОДНОМЕРНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ  
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ И АЭРОАКУСТИКИ  
НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ**

© 2013 г. *И.В. Абалакин, Т.К. Козубская*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва  
tata@imamod.ru

Статья подготовлена в ходе работ по Государственному контракту 14.514.12.0003 Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2013 годы».

Статья дает подробное описание EBR схемы, предназначенной для численного моделирования задач аэродинамики и аэроакустики на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках. Схема предусматривает определение переменных в узлах сетки и построение контрольных объемов. Ее повышенная точность достигается за счет ориентированной вдоль ребер сетки квазиодномерной реконструкции переменных, используемой для вычисления потоков через грани контрольных объемов. Приводятся результаты аналитического исследования точности схемы на «декартовых» сетках, а также экспериментального исследования точности путем решения тестовой задачи о распространении акустического гауссова импульса на сгущающихся сетках различной структуры.

Ключевые слова: схемы повышенной точности, контрольные объемы, реконструкция переменных, неструктурированные сетки, уравнения Эйлера, аэроакустика.

**HIGHER ACCURACY SCHEME BASED ON EDGE-ORIENTED  
QUASI-1D RECONSTRUCTION OF VARIABLES FOR SOLVING AERODYNAMICS  
AND AEROACOUSTICS PROBLEMS ON UNSTRUCTURED MESHES**

*I.V. Abalakin, T.K. Kozubskaya*

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow

The paper presents a description in details of EBR scheme for solving aerodynamics and aeroacoustics problems on unstructured triangular and tetrahedral meshes. The EBR scheme is vertex-centered and thereby presupposes the construction of control volumes. Its higher accuracy is provided at the expense of edge-based quasi-1D reconstruction of variables used for the calculation of numerical fluxes through the cell faces. The results of analytical study of EBR scheme accuracy for “Cartesian” meshes and experimental study by solving the test problem on propagation of acoustic Gaussian pulse on meshes of different quality are given.

Key words: higher-accuracy schemes, cells, reconstruction of variables, unstructured meshes, Euler equations, aeroacoustics.

## 1. Введение

В настоящее время ни у кого не осталось сомнений в том, что численное моделирование задач нестационарной аэродинамики и аэроакустики, претендующее на достоверность и применимость для решения промышленных задач, требует высокой точности. Точность вычислений должна быть, как минимум, сопоставимой с точностью аналогичных физических экспериментов и по возможности превышать ее. Лишь при этом условии вычислительный эксперимент может стать полноценным средством фундаментальных исследований и инженерных разработок в авиастроении и других отраслях промышленности, связанных с высокоскоростными течениями. Особенно важно данное условие для приложений аэроакустики, где спектральный состав и мощность звукового излучения являются основным объектом изучения. Среди наиболее актуальных задач прикладной аэроакустики в наши дни – проблема снижения шума, производимого самолетами на разных этапах полета: на стадии взлета-посадки шум негативно влияет на работников аэропортов и проживающее в округе население, на крейсерском режиме шум вреден для пассажиров и экипажа внутри кабины лайнера.

Проблема достижения высокой точности расчета напрямую связана с детализацией используемой вычислительной сетки, ее качеством и структурой. Возможность использования сетки большой размерности определяется доступностью высокопроизводительных вычислительных ресурсов, предоставляемых современными суперкомпьютерами, а также эффективностью используемых параллельных алгоритмов. Однако повышение качества получаемых результатов путем измельчения сеток оказывается не столь эффективным, как применение в расчетах численных алгоритмов, основанных на схемах высокого порядка точности.

При создании численного метода выбор структуры сетки, как правило, приводит к дилемме. Известно, что разработка алгоритмов высокой точности для сеток регулярной структуры является существенно более легкой процедурой, чем на неструктурированных сетках. В то же время построение структурированных сеток для реальных конфигураций исследуемых объектов является исключительно сложной и не всегда выполнимой задачей. Многоблочная технология, безусловно, расширяет область применения структурированных сеток, но в общем случае усложняет алгоритм и может вносить дополнительные погрешности в численный результат. В этом смысле преимуществом неструктурированных сеток является то, что их можно строить в областях произвольных конфигураций без необходимости использования блочного подхода. Однако использование неструктурированных сеток заметно усложняет построение схем высокой точности. Так, все хорошо известные работающие на неструктурированных сетках коммерческие пакеты в газовой динамике, например, [1,2], основаны на алгоритмах не выше третьего порядка точности.

Основными подходами к построению схем повышенной точности на неструктурированных сетках являются метод конечных элементов, в частности, бурно развивающийся в настоящее время метод разрывных элементов Галеркина [3], и конечно-объемные методы, основанные на полиномиальной реконструкции переменных [4,5]. Последние дают достаточно хорошие результаты [6,7], но до сих пор не нашли широкого распространения в силу своей высокой вычислительной стоимости.

Данная статья посвящена экономной схеме повышенной точности, построенной в рамках конечно-объемного подхода для неструктурированных тетраэдральных сеток с

определением переменных в узлах<sup>1</sup>. Впервые идея, лежащая в основе схемы, была предложена в [8] применительно к двумерному линейному уравнению переноса. Она состоит в высокоточной аппроксимации потоков через грани контрольного объема вдоль ребер сетки, соединяющих соседние узлы. Для построения аппроксимации строится квази-одномерная реконструкция переменных высокого порядка. При этом схема строится таким образом, что на структурированных сетках совпадает с конечно-разностной схемой высокого порядка точности. Такой метод предлагает решение выше обозначенной дилеммы на пути объединения преимуществ структурированной и неструктурированной сеток. Действительно, будучи примененной к структурированной сетке, схема обеспечивает высокую точность (вплоть до 6-го порядка включительно). На неструктурированной сетке предлагаемая схема также обладает повышенной точностью, что подтверждается экспериментальными оценками скорости сходимости решения к точному на сгущающихся сетках для широкого набора тестовых задач. Такие оценки в интегральных нормах оказываются между вторым и шестым порядком в зависимости от качества сетки.

В силу особенностей построения данной схемы на основе реберно-ориентированной реконструкции переменных, будем здесь и в дальнейшем называть ее EBR (Edge-Based Reconstruction) схемой.

EBR схема разрабатывалась авторами продолжительное время [9,10], однако ни в одной статье не содержится ее последовательного и алгоритмически полного описания. Этот пробел восполняется в настоящей работе.

## 2. Высокоточная аппроксимация конвективных потоков в одномерной узловой схеме

**Схема на основе реконструкции переменных для линейного уравнения переноса.** Рассмотрим линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0.$$

В [10] представлена многопараметрическая схема высокого порядка точности (до 6-го включительно в зависимости от выбора параметров), выведенная на основе двукратного применения метода дифференциального приближения [11]. Для удобства дальнейших рассмотрений построим эту же схему другим способом.

В соответствии с методом прямых будем рассматривать полудискретную аппроксимацию уравнения (или систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной  $t$ )

$$\left( \frac{du}{dt} \right)_j = -\Psi_j(u),$$

где функция  $\Psi_j(u)$  есть разностная аппроксимация пространственной производной.

Введем разностную сетку с узлами  $x_j$  и постоянным шагом  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ . Определим расчетную ячейку с границами в средних между узлами сетки точках  $x_{j\pm 1/2} = (x_{j\pm 1} + x_j) / 2$ . Сеточное значение искомой функции задается в центре ячейки

<sup>1</sup> Далее в статье будем называть схемы с определением переменных в узлах «узловыми».

$u_j = u(x_j)$ , а разностные потоки и интерполированные значения сеточной функции задаются на границах ячейки  $u_{j+1/2} = u(x_{j+1/2})$ .

Запишем центрально-разностную аппроксимацию пространственной производной как

$$\Psi_j(u) = -a \frac{u_{j+1/2}^L - u_{j-1/2}^L}{\Delta x}, \quad (1)$$

где  $u_{j+1/2}^L$  и  $u_{j-1/2}^L$  означают приблизительно определенные значения искомой функции в точках  $x_{j\pm 1/2}$ . Заметим, если определить эти значения как  $u_{j+1/2}^L \approx u_j$  и  $u_{j-1/2}^L \approx u_{j-1}$  в рамках кусочно-постоянной аппроксимации, получим известную противопотоковую схему «уголок» первого порядка точности.

Рассмотрим теперь алгоритм построения схемы 3-го порядка, которую можно получить на основе кусочно-линейного представления искомой функции. Согласно предлагаемой процедуре, значение  $u_{j+1/2}^L$  на интерфейсе  $j+1/2$  может быть найдено в виде взвешенной суммы значений, полученных путем линейной интерполяции и/или экстраполяции по соседним узлам сетки (рис.1А, Б, В). Таким образом, можно получить следующие значения на грани:

$$\begin{aligned} 1. \quad u_{j+1/2}^{L(2)} &= u_j + \frac{1}{2} \left[ (1-\beta^{(2)})(u_{j+1} - u_j) + \beta^{(2)}(u_j - u_{j-1}) \right] = \\ &= u_j + \frac{1}{2} \left[ (1-\beta^{(2)})\Delta u_{j+1/2} + \beta^{(2)}\Delta u_{j-1/2} \right], \end{aligned} \quad (A);$$

$$\begin{aligned} 2. \quad u_{j+1/2}^{L(1)} &= u_j + \frac{1}{2} \left[ (1-\beta^{(1)})(u_j - u_{j-1}) + \beta^{(1)}(u_{j-1} - u_{j-2}) \right] = \\ &= u_j + \frac{1}{2} \left[ (1-\beta^{(1)})\Delta u_{j-1/2} + \beta^{(1)}\Delta u_{j-3/2} \right], \end{aligned} \quad (B);$$

$$\begin{aligned} 3. \quad u_{j+1/2}^{L(3)} &= u_j + \frac{1}{2} \left[ (1-\beta^{(3)})(u_{j+2} - u_{j+1}) + \beta^{(3)}(u_{j+1} - u_j) \right] = \\ &= u_j + \frac{1}{2} \left[ (1-\beta^{(3)})\Delta u_{j+3/2} + \beta^{(3)}\Delta u_{j+1/2} \right]. \end{aligned} \quad (B)$$

Аналогичным образом определим значение  $u_{j-1/2}^L$  на грани  $j-1/2$ . Разлагая в ряд Тейлора значения  $u_{j+1/2}^L$  и  $u_{j-1/2}^L$  в точке  $j$  в аппроксимации производной (3), можно показать, что при весовых коэффициентах  $\beta^{(1)} = -2/3$ ,  $\beta^{(2)} = 1/3$ ,  $\beta^{(3)} = 4/3$  построенные схемы А, Б или В имеют 3-й порядок точности, а при других значениях  $\beta^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , – второй.

Следует отметить, что приведенные схемы третьего порядка точности А, Б и В обладают различными свойствами. На рис.2 приведен модуль множителя перехода  $|G|$  [12] в зависимости от волнового числа и числа Куранта при использовании для интегрирова-

ния по времени явной линейной схемы Рунге-Кутты 3-го порядка точности. Можно видеть, что устойчивой во всем диапазоне волн при числе Куранта  $CFL < 1$  является лишь схема А, обеспечивающая всюду  $|G| \leq 1$ . Схемы Б и В применимы лишь в ограниченном диапазоне волновых чисел и числа Куранта. В то же время при использовании этих схем в комбинации со схемой А можно построить устойчивую схему 5-го порядка точности.

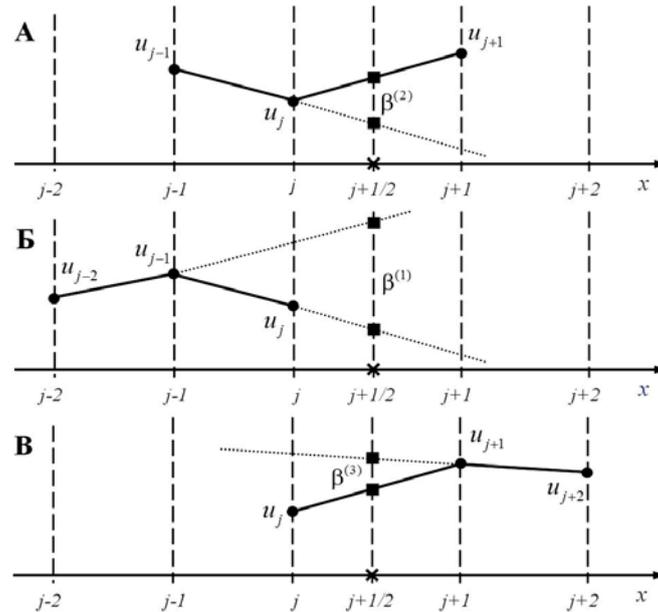


Рис.1. Геометрическая интерпретация построения схем повышенной точности.

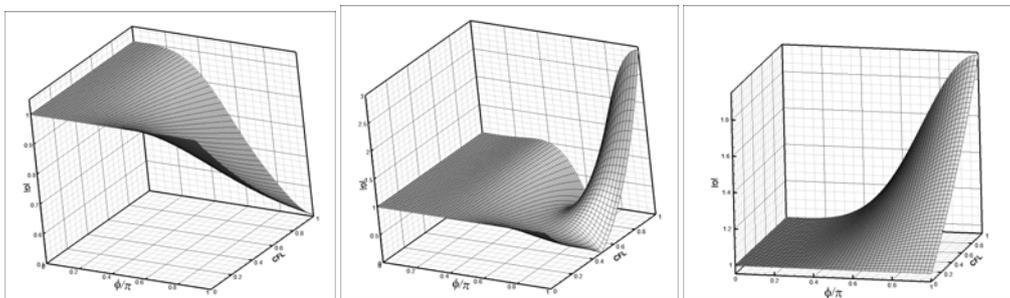


Рис.2. Амплитудные ошибки схем третьего порядка точности: А (слева), Б (в центре) и В (справа).

С этой целью приблизим значение на интерфейсе  $u_{j+1/2}^L$  взвешенной суммой значений, полученных согласно методам А, Б и В (рис.1)

$$u_{j+1/2}^L = \sum_{k=1}^3 \sigma^{(k)} u_{j+1/2}^{L(k)},$$

и выберем веса  $\beta^{(k)}, \sigma^{(k)}$  как

$$\beta^{(1)} = -\frac{2}{3}, \quad \beta^{(2)} = \frac{1}{3}, \quad \beta^{(3)} = \frac{4}{3}, \quad \sigma^{(1)} = \frac{1}{10}, \quad \sigma^{(2)} = \frac{6}{10}, \quad \sigma^{(3)} = \frac{3}{10}.$$

При этом

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^L &= u_j - \frac{1}{30} \Delta u_{j-3/2} + \frac{11}{60} \Delta u_{j-1/2} + \frac{2}{5} \Delta u_{j+1/2} - \frac{1}{20} \Delta u_{j+3/2}, \\ \Psi_j(u) &= -a \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^L = -a \frac{u_{j+1/2}^L - u_{j-1/2}^L}{\Delta x} = \\ &= -a \frac{2\Delta u_{j-5/2} - 13\Delta u_{j-3/2} + 47\Delta u_{j-1/2} + 27\Delta u_{j+1/2} - 3\Delta u_{j+3/2}}{60\Delta x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что получаемая при таком определении схема, записанная через значения искомой функции на шаблоне  $\{x_{j-3}, x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}$  как

$$\Psi_j(u) = -a \frac{-2u_{j-3} + 15u_{j-2} - 60u_{j-1} + 20u_j + 30u_{j+1} - 3u_{j+2}}{60\Delta x},$$

совпадает со схемой WENO пятого порядка точности.

На рис.3 приведен модуль множителя перехода  $|G|$  для полученной схемы пятого порядка точности при использовании для интегрирования по времени явной линейной схемы Рунге-Кутты 5-го порядка точности. Из рисунка видно, что эта схема, также как и схема А третьего порядка, устойчива (множитель перехода  $|G| \leq 1$ ) при числах Куранта меньших 1 и во всем диапазоне разрешаемых волновых чисел.

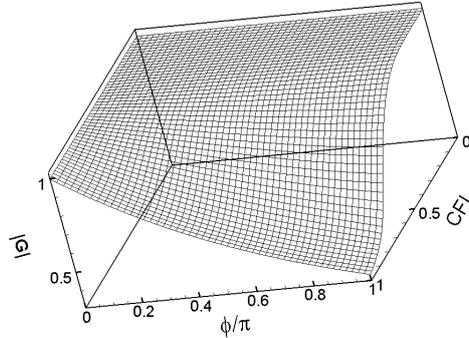


Рис.3. Амплитудные ошибки схемы пятого порядка точности.

Запишем аналогичную схему для уравнения переноса в случае скорости  $a < 0$

$$u_{j+1/2}^R = u_{j+1} + \frac{1}{20} \Delta u_{j-1/2} - \frac{2}{5} \Delta u_{j+1/2} - \frac{11}{60} \Delta u_{j+3/2} + \frac{1}{30} \Delta u_{j+5/2},$$

$$\begin{aligned}\Psi_j(u) &= -a \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^R = -a \frac{u_{j+1/2}^R - u_{j-1/2}^R}{\Delta x} = \\ &= -a \frac{-2\Delta u_{j+5/2} + 13\Delta u_{j+3/2} - 47\Delta u_{j+1/2} - 27\Delta u_{j-1/2} + 3\Delta u_{j-3/2}}{60\Delta x}.\end{aligned}\quad (3)$$

**Схема на основе реконструкции потоковых переменных в нелинейном случае.**  
Рассмотрим теперь нелинейное уравнение переноса в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Как известно, общий вид противопотоковой схемы в рамках подхода MUSCL [13] для уравнения (4) можно представить в виде

$$\left( \frac{du}{dt} \right)_j + \frac{h(u_{j+1/2}^R, u_{j+1/2}^L) - h(u_{j-1/2}^R, u_{j-1/2}^L)}{\Delta x} = 0,$$

где  $h(a, b)$  – численный поток. Например, в случае решения задачи о распаде разрыва методом Рое [14] численный поток определяется как

$$h^{Roe}(u_{j\pm 1/2}^R, u_{j\pm 1/2}^L) = \frac{f(u_{j\pm 1/2}^R) + f(u_{j\pm 1/2}^L)}{2} - \delta \left| f' \left( \frac{u_j + u_{j+1}}{2} \right) \right| (u_{j\pm 1/2}^R - u_{j\pm 1/2}^L),$$

где  $u_{j\pm 1/2}^R$  и  $u_{j\pm 1/2}^L$  – значения реконструированных переменных справа и слева от границ расчетной ячейки  $x_{j\pm 1/2}$ ,  $\delta$  – параметр, определяющий вклад противопотоковой (схемной) диссипации,  $0 \leq \delta \leq 1$ .

Отметим, что в рамках MUSCL-подхода невозможно построить схему с порядком точности выше третьего для нелинейного уравнения [15]. Поэтому в работе для построения схемы повышенной точности в ряде случаев удобнее перейти к реконструкции потоков и, например, использовать для дальнейших построений одномерную схему Хуанг [16]

$$\begin{aligned}\left( \frac{du}{dt} \right)_j + \frac{h(f_{j+1/2}^R, f_{j+1/2}^L) - h(f_{j-1/2}^R, f_{j-1/2}^L)}{\Delta x} &= 0, \\ h^{Huang}(f_{j\pm 1/2}^R, f_{j\pm 1/2}^L) &= \frac{f_{j\pm 1/2}^R + f_{j\pm 1/2}^L}{2} - \delta \operatorname{sign} \left( f' \left( \frac{u_j + u_{j+1}}{2} \right) \right) (f_{j\pm 1/2}^R - f_{j\pm 1/2}^L).\end{aligned}\quad (5)$$

В численном потоке (5) реконструированные переменные  $f_{j\pm 1/2}^R$ ,  $f_{j\pm 1/2}^L$  определяются так же, как и в линейном случае.

Полученная таким образом конечно-разностная схема (5) в зависимости от выбора коэффициентов реконструкции  $\beta^{(k)}$ ,  $\sigma^{(k)}$ , а также параметра  $\delta$  при члене, определяю-

шем противопотоковую диссипацию, может иметь точность до 6-го порядка включительно. Нетрудно заметить, что выбор  $\delta = 0$  приводит к построению центрально-разностной схемы 2-го, 4-го или 6-го порядков в зависимости от типа выбранной реконструкции.

### 3. Многомерная EBR схема для структурированной сетки

**Конечно-разностная EBR схема для двумерных уравнений Эйлера.** Для системы двумерных уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{Q})}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(E + p))^T, \quad \mathbf{G} = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(E + p))^T,$$

приведенных в векторно-матричном виде относительно вектора консервативных переменных  $\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, E)^T$ , где  $\rho$  – плотность,  $u, v$  – компоненты скорости,  $E = \rho \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}$  – полная энергия,  $\gamma$  – универсальная газовая постоянная, выпишем схемы, аналогичные (2) и (3).

Введем разностную сетку с узлами  $(x_i, y_j)$  и постоянными шагами  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ ,  $\Delta y = y_{j+1} - y_j$  и определим «вспомогательные» точки  $(x_{i\pm 1/2}, y_{j\pm 1/2})$ ,  $x_{i\pm 1/2} = (x_{i\pm 1} + x_i)/2$ ,  $y_{j\pm 1/2} = (y_{j\pm 1} + y_j)/2$ .

Представим схему в общем виде как

$$\left( \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_{i,j} + \frac{(h_x)_{i+1/2,j} - (h_x)_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{(h_y)_{i,j+1/2} - (h_y)_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0. \quad (7)$$

Аналогично одномерному случаю, можно определять численные потоки  $h_x, h_y$  вдоль направлений  $x$  и  $y$  соответственно при помощи метода Roe

$$(h_x)_{i\pm 1/2,j} = h_x^{Roe}(\mathbf{Q}_{i\pm 1/2,j}^R, \mathbf{Q}_{i\pm 1/2,j}^L) =$$

$$= \frac{\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i\pm 1/2,j}^R) + \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{i\pm 1/2,j}^L)}{2} - \frac{\delta}{2} |\mathbf{A}_x(\mathbf{Q}_{i\pm 1/2,j}^{Roe})| (\mathbf{Q}_{i\pm 1/2,j}^R - \mathbf{Q}_{i\pm 1/2,j}^L),$$

$$(h_y)_{i,j\pm 1/2} = h_y^{Roe}(\mathbf{Q}_{i,j\pm 1/2}^R, \mathbf{Q}_{i,j\pm 1/2}^L) =$$

$$= \frac{\mathbf{G}(\mathbf{Q}_{i,j\pm 1/2}^R) + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_{i,j\pm 1/2}^L)}{2} - \frac{\delta}{2} |\mathbf{A}_y(\mathbf{Q}_{i,j\pm 1/2}^{Roe})| (\mathbf{Q}_{i,j\pm 1/2}^R - \mathbf{Q}_{i,j\pm 1/2}^L),$$

где  $\mathbf{A}_x = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}$ ,  $\mathbf{A}_y = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Q}}$  – якобианы, а  $\mathbf{Q}_{i\pm 1/2,j}^{Roe}$ ,  $\mathbf{Q}_{i,j\pm 1/2}^{Roe}$  – средние по Roe [14], построенные по физическим переменным течения, реконструированным с обеих сторон (индексы

“L” и “R”) по  $x$  и  $y$ , соответственно, от четырех «вспомогательных» точек  $(x_{i\pm 1/2}, y_{j\pm 1/2})$ . Под модулем матриц якобианов понимается при этом

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{A}_x(\mathbf{Q}_{i\pm 1/2, j}^{Roe}) \right| &= \mathbf{S}_x |\Lambda_x| \mathbf{S}_x^{-1} = \\ &= \mathbf{S}_x \text{diag} \left( \left| u_{i\pm 1/2, j}^{Roe} \right|, \left| u_{i\pm 1/2, j}^{Roe} \right|, \left| u_{i\pm 1/2, j}^{Roe} c_{i\pm 1/2, j}^{Roe} \right|, \left| u_{i\pm 1/2, j}^{Roe} c_{i\pm 1/2, j}^{Roe} \right| \right) \mathbf{S}_x^{-1}, \\ \left| \mathbf{A}_y(\mathbf{Q}_{i, j\pm 1/2}^{Roe}) \right| &= \mathbf{S}_y |\Lambda_y| \mathbf{S}_y^{-1} = \\ &= \mathbf{S}_y \text{diag} \left( \left| v_{i\pm 1/2, j}^{Roe} \right|, \left| v_{i\pm 1/2, j}^{Roe} \right|, \left| v_{i\pm 1/2, j}^{Roe} c_{i\pm 1/2, j}^{Roe} \right|, \left| v_{i\pm 1/2, j}^{Roe} c_{i\pm 1/2, j}^{Roe} \right| \right) \mathbf{S}_y^{-1}, \end{aligned}$$

где  $c$  – скорость звука, а  $\mathbf{S}_x^{-1}$ ,  $\mathbf{S}_x$ ,  $\mathbf{S}_y^{-1}$ ,  $\mathbf{S}_y$  – матрицы, состоящие из левых и правых собственных векторов якобианов  $\mathbf{A}_x$ ,  $\mathbf{A}_y$  соответственно.

Другой способ задания численных потоков можно получить путем обобщения на двумерный случай одномерной схемы Хуанг:

$$\begin{aligned} (h_x)_{i\pm 1/2, j} &= h_x^{Huang} \left( \mathbf{F}_{i\pm 1/2, j}^R, \mathbf{F}_{i\pm 1/2, j}^L \right) = \\ &= \frac{\mathbf{F}_{i\pm 1/2, j}^R + \mathbf{F}_{i\pm 1/2, j}^L}{2} - \frac{\delta}{2} \text{sign} \mathbf{A}_x \left( \frac{\mathbf{Q}_{i\pm 1/2, j}^R + \mathbf{Q}_{i\pm 1/2, j}^L}{2} \right) \left( \mathbf{F}_{i\pm 1/2, j}^R - \mathbf{F}_{i\pm 1/2, j}^L \right), \\ (h_y)_{i, j\pm 1/2} &= h_y^{Huang} \left( \mathbf{F}_{i, j\pm 1/2}^R, \mathbf{F}_{i, j\pm 1/2}^L \right) = \\ &= \frac{\mathbf{F}_{i, j\pm 1/2}^R + \mathbf{F}_{i, j\pm 1/2}^L}{2} - \frac{\delta}{2} \text{sign} \mathbf{A}_y \left( \frac{\mathbf{Q}_{i, j\pm 1/2}^R + \mathbf{Q}_{i, j\pm 1/2}^L}{2} \right) \left( \mathbf{F}_{i, j\pm 1/2}^R - \mathbf{F}_{i, j\pm 1/2}^L \right), \end{aligned} \quad (8)$$

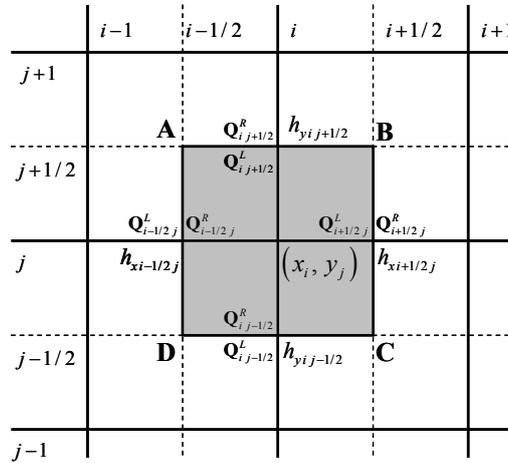
где

$$\begin{aligned} \text{sign} \mathbf{A}_x \left( \frac{\mathbf{Q}_{i\pm 1/2, j}^R + \mathbf{Q}_{i\pm 1/2, j}^L}{2} \right) &= \mathbf{S}_x \text{diag} \left( \lambda_{i\pm 1/2, j}^1, \lambda_{i\pm 1/2, j}^2, \lambda_{i\pm 1/2, j}^3, \lambda_{i\pm 1/2, j}^4 \right) \mathbf{S}_x^{-1}, \\ \lambda_{i\pm 1/2, j}^1 &= \lambda_{i\pm 1/2, j}^2 = \text{sign} \left( u_{i\pm 1/2, j}^L + u_{i\pm 1/2, j}^R \right), \\ \lambda_{i\pm 1/2, j}^3 &= \text{sign} \left( u_{i\pm 1/2, j}^L c_{i\pm 1/2, j}^L + u_{i\pm 1/2, j}^R c_{i\pm 1/2, j}^R \right), \\ \lambda_{i\pm 1/2, j}^4 &= \text{sign} \left( u_{i\pm 1/2, j}^L c_{i\pm 1/2, j}^L + u_{i\pm 1/2, j}^R c_{i\pm 1/2, j}^R \right), \\ \text{sign} \mathbf{A}_y \left( \frac{\mathbf{Q}_{i, j\pm 1/2}^R + \mathbf{Q}_{i, j\pm 1/2}^L}{2} \right) &= \mathbf{S}_y \text{diag} \left( \lambda_{i, j\pm 1/2}^1, \lambda_{i, j\pm 1/2}^2, \lambda_{i, j\pm 1/2}^3, \lambda_{i, j\pm 1/2}^4 \right) \mathbf{S}_y^{-1}, \\ \lambda_{i, j\pm 1/2}^1 &= \lambda_{i, j\pm 1/2}^2 = \text{sign} \left( v_{i, j\pm 1/2}^L + v_{i, j\pm 1/2}^R \right), \\ \lambda_{i, j\pm 1/2}^3 &= \text{sign} \left( v_{i, j\pm 1/2}^L c_{i, j\pm 1/2}^L + v_{i, j\pm 1/2}^R c_{i, j\pm 1/2}^R \right), \\ \lambda_{i, j\pm 1/2}^4 &= \text{sign} \left( v_{i, j\pm 1/2}^L c_{i, j\pm 1/2}^L + v_{i, j\pm 1/2}^R c_{i, j\pm 1/2}^R \right). \end{aligned}$$

Использованные при построении схемы скалярные и векторные реконструированные переменные (с индексами “L” и “R”) определяются при помощи конечных разностей в соответствии с формулами (2)-(3).

Полученная таким образом схема (7)-(8) является конечно-разностной и, в зависимости от выбора коэффициентов реконструкции  $\beta^{(k)}, \sigma^{(k)}$ , а также параметра  $\delta$  при диссипативной части, обеспечивает точность до 6-го порядка включительно на декартовых равномерных сетках.

**Конечно-объемная EBR схема для двумерных уравнений Эйлера на декартовой сетке.** Рассмотрим введенную в предыдущем разделе равномерную декартовую сетку. Значения сеточных функций при этом по-прежнему будем определять в узлах сетки  $(x_i, y_j)$ . Определим контрольный объем, соответствующий сеточному узлу  $(x_i, y_j)$ , как прямоугольник ABCD с вершинами в точках  $(x_{i-1/2}, y_{j+1/2}), (x_{i+1/2}, y_{j+1/2}), (x_{i+1/2}, y_{j-1/2}), (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$  (рис.4).



**Рис.4.** Контрольный объем ABCD вокруг узла  $(x_i, y_j)$  на декартовой сетке.

Запишем для прямоугольника ABCD законы сохранения массы, импульса и энергии, проинтегрировав по объему уравнения Эйлера (6)

$$\left( \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_{ij} = - \frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint_{\Gamma_{ABCD}} (\mathcal{F}, \mathbf{n}) ds, \quad \mathcal{F} = (\mathbf{F}, \mathbf{G}), \quad (\mathcal{F}, \mathbf{n}) = \mathbf{F}n_x + \mathbf{G}n_y, \quad (9)$$

где  $\Gamma_{ABCD}$  – граница (контур) прямоугольника ABCD,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к границе. Контурный интеграл в формуле (9) разобьем на сумму четырех интегралов по граням прямоугольника ABCD, каждый из которых приблизим по формуле прямоугольников, предполагая, что численные потоки  $(h_x)_{i+1/2,j}, (h_x)_{i-1/2,j}, (h_y)_{i,j+1/2}, (h_y)_{i,j-1/2}$ , определены в центрах соответствующих граней

$$\oint_{\Gamma_{ABCD}} (\mathcal{F}, \mathbf{n}) ds = \int_{AB} \mathbf{G} ds + \int_{BC} \mathbf{F} ds - \int_{CD} \mathbf{G} ds - \int_{DA} \mathbf{F} ds \approx$$

$$\approx (h_y)_{i, j+1/2} \Delta x + (h_x)_{i+1/2, j} \Delta y - (h_y)_{i, j-1/2} \Delta x - (h_x)_{i-1/2, j} \Delta y. \quad (10)$$

Можно видеть, что подставив выражения для потоков (8) в (10), получим ту же самую схему (7). Таким образом, одну и ту же схему (7)-(8) на равномерной сетке можно получить в рамках конечно-разностного и конечно-объемного подходов.

#### 4. Многомерная EBR схема на неструктурированной сетке

**Введение контрольных объемов для узловых схем.** Численные алгоритмы метода конечных объемов с определением переменных в узлах сетки помимо сетки как таковой требуют дополнительных геометрических построений, связанных с необходимостью определения ячеек, для которых выписываются разностные аналоги законов сохранения. Тем самым использование методов с определением переменных в узлах сетки связано с некоторой добавочной вычислительной стоимостью, которая, однако, носит чисто геометрический характер и потому при фиксированной сетке соответствующие построения могут быть проделаны однократно в начале расчета.

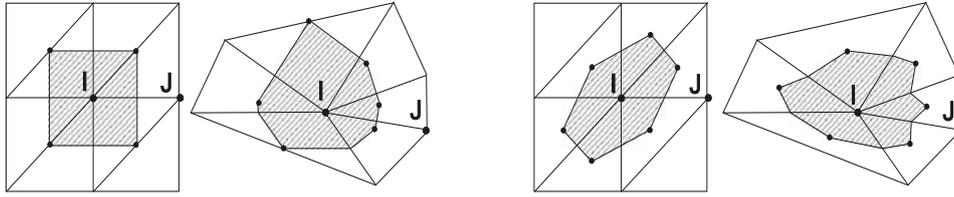
В то же время алгоритмы с определением переменных в узлах имеют и свои преимущества. Так, за счет выбора ячеек можно улучшить качество исходной расчетной сетки, в частности, в случае ее сильной анизотропии. Другим положительным свойством методов с определением переменных в узлах является их экономичность по требуемым ресурсам памяти. Это связано с тем фактом, что размерность массивов основных расчетных переменных в таких алгоритмах равна количеству узлов данной сетки. При определении же переменных в центрах сеточных элементов размерность соответствующих массивов равна числу элементов, которое значительно больше количества узлов. Так, при использовании тетраэдральных сеток количество элементов (тетраэдров) превосходит количество узлов в 5-6 раз.

В работе будем рассматривать ячейки двух типов, а именно, *барицентрические* и *ортоцентрические*, названные так в зависимости от опорных точек для построения ячеек, которыми являются центры тяжести треугольника/тетраэдра и центры описанных вокруг них окружностей/сфер соответственно. Дополнительными опорными точками для построения ячеек обоих типов являются середины ребер треугольников/тетраэдров, а также центры тяжести граней тетраэдров или центры описанных вокруг граней тетраэдра окружностей в трехмерном случае. В случае если центры описанных окружностей/сфер не попадают внутрь треугольника/тетраэдра, то соответствующие опорные точки сносятся на середину ребра наибольшей длины или в центр тяжести грани с наибольшей площадью.

На рис.5 показаны примеры орто- и барицентрических ячеек для «декартовых»\* структурированных и произвольных неструктурированных треугольных сеток. Примечательным является тот факт, что ортоцентрические ячейки в случае «декартовой» сетки полностью сохраняют декартовую структуру сетки (рис.5, первый слева). Отметим, что

\* Здесь и далее под «декартовыми» сетками понимаются треугольные сетки, полученные путем разбиения прямоугольных ячеек декартовой сетки на два прямоугольных треугольника или тетраэдральные сетки, полученные путем разбиения параллелепипедов (кубов) на тетраэдры, каждая из граней которого является прямоугольным треугольником.

в отличие от двумерного случая, сохранение декартовой структуры сетки для ортоцентрических ячеек возможно не при всех случаях разбиения параллелепипеда (куба) на тетраэдры [17].

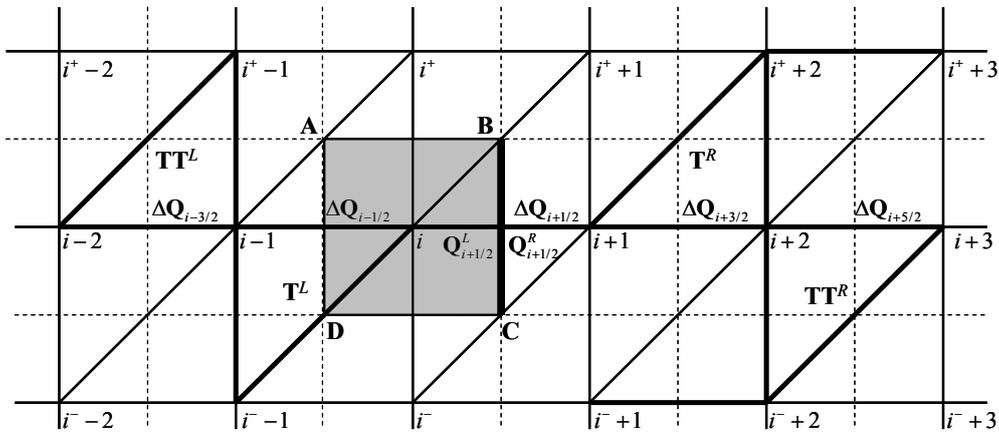


**Рис.5.** Разные типы используемых контрольных объемов (ортоцентрические – два первых рисунка слева, барицентрические – два крайних рисунка справа) для структурированных и неструктурированных треугольных сеток.

**Конечно-объемная EBR схема на «декартовых» треугольных сетках с ортоцентрическими контрольными объемами для двумерных уравнений Эйлера.** Построение узловой конечно-объемной схемы по сути своей сводится к аппроксимации потока через грани контрольного объема вокруг узлов сетки и вычислению контурного интеграла по граням ячеек. Так, для  $i$ -го узла сетки с соответствующим контрольным объемом  $C_i$  схема в общем виде выписывается как

$$\left( \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_i = - \frac{1}{|C_i|} \oint_{\partial C_i} (\mathcal{F}, \mathbf{n}) ds,$$

где  $|C_i|$  – площадь ячейки, а  $\partial C_i$  – ее граница.



**Рис.6.** Шаблон для определения потока через грань BC контрольного объема вокруг узла  $i$  в случае «декартовой» треугольной сетки.

В случае «декартовой» треугольной сетки ортоцентрический контрольный объем совпадает с ячейкой декартовой структурированной сетки, а именно, с прямоугольником ABCD (рис.6), и соответственно

$$\frac{1}{|C_i|} \oint_{\Gamma_{C_i}} (\mathcal{F}, \mathbf{n}) ds = \frac{1}{|C_i|} \left( \int_{AB} \mathbf{G} ds + \int_{BC} \mathbf{F} ds - \int_{CD} \mathbf{G} ds - \int_{DA} \mathbf{F} ds \right).$$

Здесь площадь ячейки есть площадь прямоугольника ABCD:  $|C_i| = S_{ABCD}$ .

Не ограничивая общности, проиллюстрируем нахождение численного потока  $\int_{BC} \mathbf{F} ds$  через грань прямоугольника BC (рис.6). Определим численный поток через грань BC, используя его значение  $h_{BC}$  в точке пересечения грани BC с ребром, соединяющим узлы  $i$  и  $i+1$ . Для численного интегрирования применим формулу прямоугольников

$$\int_{BC} \mathbf{F} ds \approx h_{BC} |BC|.$$

При вычислении численного потока  $h_{BC}$  в точке грани используем значения в точках шаблона  $\{i-2, i-1, i, i+1, i+2, i+3\}$  и конечные разности  $\Delta \mathbf{Q}_{i-3/2}, \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2}, \Delta \mathbf{Q}_{i+1/2}, \Delta \mathbf{Q}_{i+3/2}$  (или  $\Delta \mathbf{F}_{i-3/2}, \Delta \mathbf{F}_{i-1/2}, \Delta \mathbf{F}_{i+1/2}, \Delta \mathbf{F}_{i+3/2}$ ) и  $\Delta \mathbf{Q}_{i-1/2}, \Delta \mathbf{Q}_{i+1/2}, \Delta \mathbf{Q}_{i+3/2}, \Delta \mathbf{Q}_{i+5/2}$  (или  $\Delta \mathbf{F}_{i-1/2}, \Delta \mathbf{F}_{i+1/2}, \Delta \mathbf{F}_{i+3/2}, \Delta \mathbf{F}_{i+5/2}$ ) для реконструкций переменных слева (индекс «L») и справа (индекс «R») соответственно. В этом случае поток  $h_{BC}$  будет совпадать с потоком  $(h_x)_{i+1/2, j}$  конечно-разностной схемы. Вычисляя потоки через остальные грани аналогичным образом, можно видеть, что полученная схема полностью совпадает со схемой на декартовых структурированных сетках (10).

Здесь сделаем важное замечание. Согласно методу конечных объемов полученная EBR-схема имеет порядок не выше второго, так как при вычислении интегралов по границе контрольного объема используется формула прямоугольников. Но разность потоков через противоположащие по направлению реконструкции переменных грани обладает высоким порядком, аналогичным конечно-разностной аппроксимации.

Чтобы в дальнейшем перейти к способу построения схемы на произвольных треугольных сетках, заменим конечные разности градиентами по треугольникам. Определим градиенты по треугольникам от вектор-функции  $\mathbf{f}$  согласно  $P_1$  конечно-элементному приближению на треугольнике

$$\nabla \mathbf{f}|_T = \sum_{k \in T} \mathbf{f}_k \nabla \varphi_k,$$

где  $\varphi_k$  – базисные линейные функции (рис.7).

Введем вектор направления  $\mathbf{i} = \overline{i, i+1} = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i)$ , определённый узлами ребра сетки. Несложно проверить, что конечные разности  $\Delta \mathbf{Q}_{i-3/2}, \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2}, \Delta \mathbf{Q}_{i+3/2}, \Delta \mathbf{Q}_{i+5/2}$  (или  $\Delta \mathbf{F}_{i-3/2}, \Delta \mathbf{F}_{i-1/2}, \Delta \mathbf{F}_{i+3/2}, \Delta \mathbf{F}_{i+5/2}$ ) можно заменить проекциями градиентов сеточной функции по треугольникам  $\mathbf{T}\mathbf{T}^L, \mathbf{T}^L, \mathbf{T}^R, \mathbf{T}\mathbf{T}^R$ , соответственно, на направление  $\mathbf{i}$ :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{Q}_{i-3/2} &= \nabla \mathbf{Q}|_{TT^L \cdot \mathbf{i}}, & \Delta \mathbf{Q}_{i-1/2} &= \nabla \mathbf{Q}|_{T^L \cdot \mathbf{i}}, & \Delta \mathbf{Q}_{i+3/2} &= \nabla \mathbf{Q}|_{T^R \cdot \mathbf{i}}, & \Delta \mathbf{Q}_{i+5/2} &= \nabla \mathbf{Q}|_{TT^R \cdot \mathbf{i}}, \\ \Delta \mathbf{F}_{i-3/2} &= \nabla \mathbf{F}|_{TT^L \cdot \mathbf{i}}, & \Delta \mathbf{F}_{i-1/2} &= \nabla \mathbf{F}|_{T^L \cdot \mathbf{i}}, & \Delta \mathbf{F}_{i+3/2} &= \nabla \mathbf{F}|_{T^R \cdot \mathbf{i}}, & \Delta \mathbf{F}_{i+5/2} &= \nabla \mathbf{F}|_{TT^R \cdot \mathbf{i}}.\end{aligned}$$

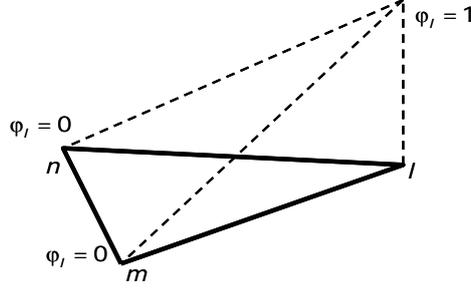


Рис.7. Определение финитной функции на треугольнике.

Действительно, если ввести понятие проекции производной функции по направлению  $\mathbf{i}$  на это направление

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial i} \cdot \frac{\mathbf{i}}{|\mathbf{i}|},$$

то конечная разность  $\Delta \mathbf{Q}_{i+1/2}$  (или  $\Delta \mathbf{F}_{i+1/2}$ ) вдоль направления  $\mathbf{i}$  может быть записана в виде

$$\Delta \mathbf{Q}_{i+1/2} = \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial i} \cdot \frac{\mathbf{i}}{|\mathbf{i}|} \right) \cdot \mathbf{i}.$$

Тогда реконструированные значения слева и справа от грани BC могут быть представлены через градиенты соответствующих треугольников как

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{i+1/2}^L &= \mathbf{Q}_i - \frac{1}{30} \nabla \mathbf{Q}|_{TT^L \cdot \mathbf{i}} + \frac{11}{60} \nabla \mathbf{Q}|_{T^L \cdot \mathbf{i}} + \frac{2}{5} \Delta \mathbf{Q}_{i+1/2} - \frac{1}{20} \nabla \mathbf{Q}|_{T^R \cdot \mathbf{i}}, \\ \mathbf{Q}_{i+1/2}^R &= \mathbf{Q}_{i+1} + \frac{1}{20} \nabla \mathbf{Q}|_{T^L \cdot \mathbf{i}} - \frac{2}{5} \Delta \mathbf{Q}_{i+1/2} - \frac{11}{60} \nabla \mathbf{Q}|_{T^R \cdot \mathbf{i}} + \frac{1}{30} \nabla \mathbf{Q}|_{TT^R \cdot \mathbf{i}}.\end{aligned}\tag{11}$$

Как уже было упомянуто выше, реконструкция счетных переменных (11) используется при определении потока по методу Роу. Аналогичная реконструкция потоковых переменных используется при конструировании численного потока согласно схеме Хуанг, обобщенной на многомерный случай:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{i+1/2}^L &= \mathbf{F}_i - \frac{1}{30} \nabla \mathbf{F}|_{TT^L \cdot \mathbf{i}} + \frac{11}{60} \nabla \mathbf{F}|_{T^L \cdot \mathbf{i}} + \frac{2}{5} \Delta \mathbf{F}_{i+1/2} - \frac{1}{20} \nabla \mathbf{F}|_{T^R \cdot \mathbf{i}}, \\ \mathbf{F}_{i+1/2}^R &= \mathbf{F}_{i+1} + \frac{1}{20} \nabla \mathbf{F}|_{T^L \cdot \mathbf{i}} - \frac{2}{5} \Delta \mathbf{F}_{i+1/2} - \frac{11}{60} \nabla \mathbf{F}|_{T^R \cdot \mathbf{i}} + \frac{1}{30} \nabla \mathbf{F}|_{TT^R \cdot \mathbf{i}}.\end{aligned}\tag{12}$$

Будем называть треугольники  $\mathbf{T}^L, \mathbf{T}^R$  «противопотоковыми» треугольниками первого уровня или просто «противопотоковыми», а треугольники  $\mathbf{TT}^L, \mathbf{TT}^R$  – «противопотоковыми» треугольниками второго уровня.

Следует отметить, что градиенты по «противопотоковым» треугольникам второго уровня  $\mathbf{TT}^L, \mathbf{TT}^R$  («противопотоковые» градиенты) можно заменить «узловыми» градиентами, определенными в узлах сетки  $i-1$  и  $i+2$  соответственно. «Узловой» градиент в узле сетки  $p$  для 2D/3D геометрии определяется как взвешенная сумма градиентов по треугольникам/тетраэдрам, имеющим общую вершину в точке  $p$ :

$$\nabla \mathbf{f}|_p = \frac{1}{|C_p|} \sum_{k=1}^{N_p} \frac{|T_k|}{n} \nabla \mathbf{f}|_{T_k}, \quad \begin{array}{l} n=3, \text{ 2D геометрия,} \\ n=4, \text{ 3D геометрия,} \end{array}$$

где  $|C_p|$  – площадь/объем барицентрической ячейки<sup>2</sup> вокруг узла  $p$ ,  $\{T_k, k=1, \dots, N_p\}$  – множество треугольников/тетраэдров, имеющих общую вершину в узле  $p$ . При замене градиентов по «противопотоковым» треугольникам второго уровня «узловыми» градиентами

$$\begin{array}{ll} \nabla \mathbf{Q}|_{\mathbf{TT}^L} \rightarrow \nabla \mathbf{Q}|_{i-1} & \nabla \mathbf{Q}|_{\mathbf{TT}^R} \rightarrow \nabla \mathbf{Q}|_{i+2} \\ \nabla \mathbf{F}|_{\mathbf{TT}^L} \rightarrow \nabla \mathbf{F}|_{i-1} & \nabla \mathbf{F}|_{\mathbf{TT}^R} \rightarrow \nabla \mathbf{F}|_{i+2} \end{array}$$

коэффициенты реконструкции в (11) и (12) изменятся, и реконструкция будет иметь вид

$$\begin{array}{l} \mathbf{Q}_{i+1/2}^L = \mathbf{Q}_i - \frac{1}{15} \nabla \mathbf{Q}|_{i-1} \cdot \mathbf{i} + \frac{17}{60} \nabla \mathbf{Q}|_{T^L} \cdot \mathbf{i} + \frac{3}{10} \Delta \mathbf{Q}_{i+1/2} - \frac{1}{60} \nabla \mathbf{Q}|_{T^R} \cdot \mathbf{i}, \\ \mathbf{Q}_{i+1/2}^R = \mathbf{Q}_{i+1} + \frac{1}{60} \nabla \mathbf{Q}|_{T^L} \cdot \mathbf{i} - \frac{3}{10} \Delta \mathbf{Q}_{i+1/2} - \frac{17}{60} \nabla \mathbf{Q}|_{T^R} \cdot \mathbf{i} + \frac{1}{15} \nabla \mathbf{Q}|_{i+2} \cdot \mathbf{i}. \end{array}$$

Изменение коэффициентов реконструкции объясняется тем, что в структурированном случае «узловые» градиенты не вырождаются в конечные разности вдоль линии, содержащей ребро сетки  $[i, i+1]$ , а включает также конечные разности вдоль соседних параллельных ей линий, содержащих узлы сетки.

Проиллюстрируем это для пары  $\nabla \mathbf{Q}|_{\mathbf{TT}^R} \rightarrow \nabla \mathbf{Q}|_{i+2}$ , опираясь на рис.6. В структурированном случае градиент по «противопотоковому» треугольнику второго уровня  $\nabla \mathbf{Q}|_{\mathbf{TT}^L}$  совпадает с разностью  $\Delta \mathbf{Q}_{i+5/2}$ , более точно

$$\Delta \mathbf{Q}_{i+5/2} = \nabla \mathbf{Q}|_{\mathbf{TT}^R} \cdot \mathbf{i}.$$

<sup>2</sup> Вообще говоря, можно определить понятие «узлового» градиента и в случае ортоцентрических объемов, но такая возможность в данной статье не рассматривается. Однако такое «барицентрическое» определение «узловых» градиентов можно использовать и при расчетах на ортоцентрических ячейках.

Проекция же соответствующего ему «узлового» градиента  $\nabla \mathbf{Q}|_{i+2}$  в узле  $i+2$  на направление  $\mathbf{i}$  вырождаются в комбинацию сразу нескольких разностей, а именно:

$$\nabla \mathbf{Q}|_{i+2} \cdot \mathbf{i} = \frac{2}{3} \Delta_0 \mathbf{Q}_{i+2} + \frac{1}{6} \Delta \mathbf{Q}_{i^{+}+5/2} + \frac{1}{6} \Delta \mathbf{Q}_{i^{-}+3/2},$$

где  $\Delta_0 \mathbf{Q}_{i+2} = \mathbf{Q}_{i+3} - \mathbf{Q}_{i+1}$  – центральная разность. Коэффициенты реконструкции при использовании «узловых» градиентов определяются в конечном итоге исходя из требования достижения высокого порядка на структурированных сетках, что будет подтверждено ниже.

**Точность конечно-объемной EBR схемы на «декартовых» треугольных сетках.** Аналитическое исследование точности построенной схемы на «декартовых» треугольных сетках проведем для двумерного линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

путем разложения по Тейлору вокруг узла сетки  $i$  всех компонент схемы, отвечающих за пространственную аппроксимацию.

Далее приведены результаты разложения в ряд Тейлора с центром в точке  $i$  членов, отвечающих за пространственную аппроксимацию для разных вариантов EBR схемы 5-го порядка и двух типов ячеек.

- EBR схема на основе «противопотоковых» градиентов – барицентрические ячейки

$$\begin{aligned} \Psi_i(u) &= a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + b \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_i + \\ &+ \frac{\delta}{180} \left( \left| a + b \frac{\Delta x}{\Delta y} \right| + \left| 2a - b \frac{\Delta x}{\Delta y} \right| \right) \Delta x^5 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \\ &+ \frac{\delta}{180} \left( \left| a \frac{\Delta y}{\Delta x} + b \right| + \left| a \frac{\Delta y}{\Delta x} - 2b \right| \right) \Delta y^5 \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + \delta |a \Delta y + b \Delta x| \times \\ &\times \left( \frac{\Delta x^4}{30} \frac{\partial^6 u}{\partial x^5 \partial y} + \frac{\Delta x^3 \Delta y}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{\Delta x \Delta y^3}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\Delta y^4}{30} \frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^5} \right) + \\ &+ O \left( \sum_{k=0}^6 \Delta x^k \Delta y^{6-k} \right). \end{aligned}$$

- EBR схема на основе «противопотоковых» градиентов – ортоцентрические ячейки

$$\Psi_i(u) = a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + b \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_i + \frac{\delta}{60} |a| \Delta x^5 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\delta}{60} |b| \Delta y^5 \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + O(\Delta x^6) + O(\Delta y^6).$$

- EBR схема на основе «узловых» градиентов – барицентрические ячейки

$$\begin{aligned} \Psi_i(u) = & a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + b \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_i + \frac{\delta}{180} \left( \left| a + b \frac{\Delta x}{\Delta y} \right| + \left| 2a - b \frac{\Delta x}{\Delta y} \right| \right) \Delta x^5 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \\ & + \frac{\delta}{180} \left( \left| a \frac{\Delta y}{\Delta x} + b \right| + \left| a \frac{\Delta y}{\Delta x} - 2b \right| \right) \Delta y^5 \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + \delta |a\Delta y + b\Delta x| \times \\ & \times \left( \frac{4\Delta x^4}{135} \frac{\partial^6 u}{\partial x^5 \partial y} + \frac{37\Delta x^3 \Delta y}{540} \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{4\Delta x^2 \Delta y^2}{45} \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} + \right. \\ & + \left. \frac{37\Delta x \Delta y^3}{540} \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{4\Delta y^4}{135} \frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^5} \right) + \frac{\delta}{270} |2a\Delta y - b\Delta x| \times \\ & \times \left( \Delta x^4 \frac{\partial^6 u}{\partial x^5 \partial y} + \Delta x^3 \Delta y \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + \Delta x^2 \Delta y^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} + \Delta x \Delta y^3 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \Delta y^4 \frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^5} \right) + \\ & + O \left( \sum_{k=0}^6 \Delta x^k \Delta y^{6-k} \right). \end{aligned}$$

- EBR схема на основе «узловых» градиентов – ортоцентрические ячейки

$$\begin{aligned} \Psi_i(u) = & a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + b \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_i + \\ & + \frac{\delta}{60} |a| \left[ \Delta x^5 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{2}{3} \left( \Delta x^4 \Delta y \frac{\partial^6 u}{\partial x^5 \partial y} + \Delta x^3 \Delta y^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} \right) \right] + \\ & + \frac{\delta}{60} |b| \left[ \Delta y^5 \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + \frac{2}{3} \left( \Delta x \Delta y^4 \frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^5} + \Delta x^2 \Delta y^3 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \right] + O \left( \sum_{k=0}^6 \Delta x^k \Delta y^{6-k} \right). \end{aligned}$$

Приведенный выше вид остаточных членов при разложении в ряд Тейлора схемы EBR5 подтверждает ее 5-й порядок аппроксимации на «декартовых» треугольных сетках. В силу более компактного вида остаточного члена в случае ортоцентрических ячеек можно было бы сделать предположение о меньшей величине ошибки схемы на этих ячейках. Но вопрос о возможной предпочтительности тех или иных ячеек далеко не очевидный, в том числе и из-за того, что в отличие от барицентрических ячеек, которые можно построить всегда, ортоцентрические ячейки строятся по правилам только для тех элементов, внутрь которых попадает центр описанной окружности, т.е. в общем случае не для всех треугольников (или тетраэдров). Поэтому выбор типа ячеек в первую очередь связан с качеством исходной сетки.

**Конечно-объемная EBR схема на неструктурированных треугольных сетках для многомерных уравнений Эйлера.** Проведём обобщение полученной разностной схемы на произвольную неструктурированную сетку для двумерного случая следующим образом. Заметим, что запись EBR схемы через «противопотоковые» и «узловые» градиенты с формальной точки зрения не предполагает наличия структурированной сетки, а

потому может быть применена к произвольной неструктурированной треугольной сетке при условии корректного определения «противопотоковых» треугольников. При этом общий вид схемы

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_i = -\frac{1}{|C_i|} \oint_{\partial C_i} (\mathcal{F}, \mathbf{n}) ds$$

остается прежний, а контурный интеграл в правой части аппроксимируется суммой потоков через грани контрольной ячейки  $C_i$ , построенной вокруг узла  $i$ . По-прежнему будем предполагать вычисление потока на каждой из граней ячейки по формуле прямоугольников.

Сделаем важное замечание. В отличие от структурированной сетки, в общем случае грань контрольного объема представляет собой ломаную линию, представляющую собой объединение двух отрезков (см. рис.5, крайний справа). Численный поток при этом можно определять двумя способами. Обозначим через  $\hat{\mathbf{n}}$  вектор нормали к отрезку, длина которого совпадает с длиной этого отрезка.

Согласно первому способу, при расчёте численного потока используются две нормали  $\hat{\mathbf{n}}^1$  и  $\hat{\mathbf{n}}^2$  к соответствующим составляющим грани. Тогда

$$\oint_{\partial C_i} (\mathcal{F}, \mathbf{n}) ds = \sum_{k \in \Omega_i} h_{ik}(\hat{\mathbf{n}}^1, \hat{\mathbf{n}}^2) = \sum_{k \in \Omega_i} \sum_{j=1}^2 h_{ik}^j(\hat{\mathbf{n}}^j), \quad (13)$$

где  $\Omega_i$  – множество точек, соседних с точкой  $i$ . Численный поток  $h_{ik}(\hat{\mathbf{n}}^1, \hat{\mathbf{n}}^2)$  вычисляется как

$$\begin{aligned} h_{ik}(\hat{\mathbf{n}}^1, \hat{\mathbf{n}}^2) &= \sum_{j=1}^2 h_{ik}^j(\hat{\mathbf{n}}^j) = \sum_{j=1}^2 \frac{(\mathbf{F}_{ik}^L \hat{n}_x^j + \mathbf{G}_{ik}^L \hat{n}_x^j) + (\mathbf{F}_{ik}^R \hat{n}_x^j + \mathbf{G}_{ik}^R \hat{n}_x^j)}{2} - \\ &- \sum_{j=1}^2 \text{sign}(\mathbf{A}_x n_x^j + \mathbf{A}_y n_y^j)_{ik} \frac{(\mathbf{F}_{ik}^R \hat{n}_x^j + \mathbf{G}_{ik}^R \hat{n}_x^j) - (\mathbf{F}_{ik}^L \hat{n}_x^j + \mathbf{G}_{ik}^L \hat{n}_x^j)}{2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\mathbf{n}^j = \hat{\mathbf{n}}^j / |s_{ik}^j|$  – единичная нормаль,  $|s_{ik}^j|$  – длина  $j$ -й составляющей  $k$ -й грани ячейки.

При втором способе расчёт численного потока зависит только от одной нормали  $\hat{\mathbf{n}}$  к грани, определяемой как сумма нормалей к составляющим грани

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}^1 + \hat{\mathbf{n}}^2. \quad (15)$$

Тогда

$$\oint_{\partial C_i} (\mathcal{F}, \mathbf{n}) ds = \sum_{k \in \Omega_i} h_{ik}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (16)$$

где численный поток записывается в отличном от (14) виде

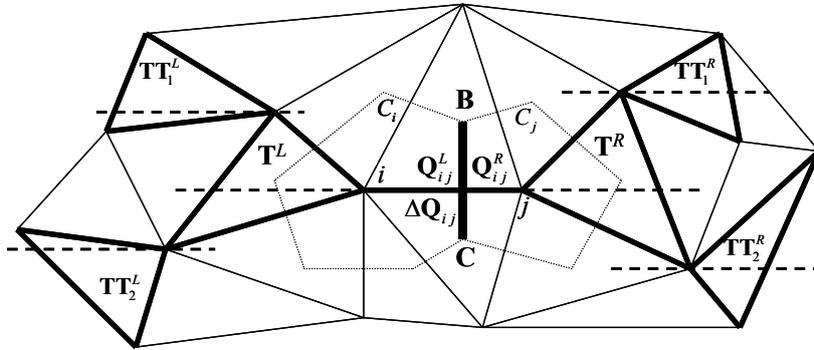
$$h_{ik}(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{(\mathbf{F}_{ik}^L \hat{n}_x + \mathbf{G}_{ik}^L \hat{n}_y) + (\mathbf{F}_{ik}^R \hat{n}_x + \mathbf{G}_{ik}^R \hat{n}_y)}{2} - \text{sign}(\mathbf{A}_x n_x + \mathbf{A}_y n_y)_{ik} \frac{(\mathbf{F}_{ik}^R \hat{n}_x + \mathbf{G}_{ik}^R \hat{n}_y) - (\mathbf{F}_{ik}^L \hat{n}_x + \mathbf{G}_{ik}^L \hat{n}_y)}{2}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{n}}/|\hat{\mathbf{n}}|$  – единичная нормаль.

Потоки  $\mathbf{F}_{ik}^L$ ,  $\mathbf{F}_{ik}^R$ ,  $\mathbf{G}_{ik}^L$ ,  $\mathbf{G}_{ik}^R$  на грани  $ik$  в обоих случаях вычисляются согласно методу (12) (при замене обозначения  $i+1/2$  на  $ik$ ) либо с использованием только «противопотоковых» градиентов, либо при задействовании «узловых» градиентов (см. выше).

Заметим, что согласно определению (15) первый и второй способы приводят к одинаковому результату только в случае, когда диффузионный член отсутствует (второе слагаемое в (14) и (17)). Таким образом, различие этих способов состоит в определении разности против потока и, как следствие, в определении численной диффузии.

Методика определения «противопотоковых» треугольников первого и второго уровней для неструктурированной сетки в общем случае иллюстрируется на рис.8, на котором утолщенными линиями изображен шаблон, на котором происходит аппроксимация потока через одну из граней контрольного объема вокруг  $i$ -го узла сетки, а именно, грань BC, разделяющую узлы  $i$  и  $j$ . Видно, что в случае «противопотоковых» градиентов шаблон включает вершины треугольников  $\mathbf{T}\mathbf{T}_1^L$ ,  $\mathbf{T}\mathbf{T}_2^L$ ,  $\mathbf{T}^L$ ,  $\mathbf{T}^R$ ,  $\mathbf{T}\mathbf{T}_1^R$ ,  $\mathbf{T}\mathbf{T}_2^R$  и состоит в данном случае из 14 точек. Если используются «узловые» градиенты, определяющиеся в шести точках – вершинах «противопотоковых» треугольников первого уровня  $\mathbf{T}^L$  и  $\mathbf{T}^R$ , то шаблон состоит из большего числа сеточных узлов.



**Рис.8.** Шаблон для определения потока через грань BC контрольного объема вокруг узла  $i$  в случае неструктурированной треугольной сетки.

Важно отметить, что в отличие от случая «декартовых» сеток, неструктурированный шаблон включает по паре «противопотоковых» треугольников второго уровня с каждой стороны от грани и, соответственно, по паре точек, в которых определяются «узловые» градиенты. В таком случае в качестве соответствующего градиента берется ус-

редненное значение по каждой из пар градиентов. Вес при усреднении определяется степенью удаленности узлов  $\mathbf{T}\mathbf{T}_1^L \cap \mathbf{T}^L$  и  $\mathbf{T}\mathbf{T}_2^L \cap \mathbf{T}^L$ , а также  $\mathbf{T}\mathbf{T}_1^R \cap \mathbf{T}^R$  и  $\mathbf{T}\mathbf{T}_2^R \cap \mathbf{T}^R$  от направления (прямой)  $(i, j)$ , заданного ребром  $[i, j]$ .

В целом, приведённые выше рассуждения и описание метода построения EBR схем остаются справедливыми и для случая трёхмерной геометрии. Далее сделаем несколько замечаний о наиболее существенных особенностях вывода EBR схем в трёхмерном случае.

Так, при конструировании трёхмерных EBR схем в случае декартовой геометрии в пространственной дискретизации (7) вводится поток по третьему измерению, который определяется аналогично потокам в формулах (8). При рассмотрении конечно-объёмной версии прямоугольный контрольный объём заменяется параллелепипедом, а потоки задаются в центрах соответствующих граней. В законе сохранения (9) контурный интеграл заменяется поверхностным с добавлением потока по третьему измерению, а его аппроксимация аналогична (10) с заменой длины ребра контрольного объёма на площадь его грани.

Отличия появляются и при обобщении на тетраэдральную декартову сетку.

В частности, трёхмерный аналог конструкции, приведенный на рис.6, реализуется только в случае представления контрольного объёма в виде параллелепипеда, что, как отмечалось выше, возможно не при всех случаях разбиения параллелепипеда на тетраэдры [17]. В случае «хорошего» разбиения на тетраэдры аналогично двумерному случаю конечные разности можно заменить проекциями градиентов функции по тетраэдрам и получить трехмерные аналоги реконструированных значений (11)-(12). Причём коэффициенты при градиентах не меняются и, как следствие, порядок аппроксимации EBR схемы на «декартовых» тетраэдральных сетках для трехмерного линейного уравнения переноса аналогичен EBR схемам на «декартовых» треугольных сетках.

Еще одним отличием является то, что в трехмерном случае «противопотоковая» конструкция второго уровня состоит из трех тетраэдров и величина соответствующего градиента определяется средними значениями по каждой из тройки градиентов по этим тетраэдрам.

## 5. Метод интегрирования по времени

Аналогично предыдущим пунктам запишем полудискретную аппроксимацию системы уравнений Эйлера в виде

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_i = -\frac{1}{|C_i|} \Psi_i(\mathbf{Q}_{\Omega_i}), \quad (18)$$

где правая часть  $\Psi_i(\mathbf{Q}_{\Omega_i})$  представляет собой пространственную аппроксимацию уравнений Эйлера в точке  $i$  и зависит от переменных  $\mathbf{Q}_{\Omega_i}$ , определенных на шаблоне  $\Omega_i$  и  $|C_i|$  – объем расчетной ячейки. Систему (18) можно интерпретировать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно временной переменной для каждой точки пространственной сетки. Поэтому в качестве процедуры интегрирования по времени подходит любой численный метод решения системы ОДУ.

В частности, для реализации явной схемы по времени можно использовать, например,  $N$ -шаговую линейную схему Рунге-Кутты, обладающую порядком  $O(\Delta t^N)$  в случае решения линеаризованной системы уравнений Эйлера (линейного оператора в правой части аппроксимации (18)), но имеющей только второй порядок для нелинейной системы [18], а также «классическую» 4-х шаговую схему Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

При реализации неявной схемы пространственная аппроксимация  $\Psi_i$  рассматривается на верхнем слое  $n+1$ , соответствующем моменту времени  $t^{n+1}$ , и для производной по времени выбирается аппроксимация второго порядка точности на момент времени  $t^{n+1}$

$$|C_i| \left( a \mathbf{Q}_i^{n+1} + b \mathbf{Q}_i^n + c \mathbf{Q}_i^{n-1} \right) = -\Psi_i \left( \mathbf{Q}_{\Omega_i}^{n+1} \right), \quad i = 1, \dots, N_p, \quad (19)$$

$$a = \frac{1}{\Delta t^n} \frac{2\tau + 1}{\tau + 1}, \quad b = -\frac{1}{\Delta t^n} (\tau + 1), \quad c = \frac{1}{\Delta t^n} \frac{\tau^2}{\tau + 1}, \quad \tau = \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}},$$

где  $N_p$  – число точек пространственной сетки,  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$  и  $\Delta t^{n-1} = t^n - t^{n-1}$ .

Нелинейная относительно переменных  $\mathbf{Q}_i^{n+1}$  система (19) далее линеаризуется относительно значений  $\mathbf{Q}_i^n$  в каждой точке  $i$ , и для определения значения  $\mathbf{Q}_i^{n+1}$  на верхнем слое строится ньютоновский итерационный процесс, который можно записать в виде линеаризованной версии схемы (19) (индекс  $i$  опускаем) через приращение искомой величины  $\Delta \mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n+1(s)}$  на  $s$ -й итерации

$$\left[ a|C| + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \left( \mathbf{Q}^{n+1(s)} \right) \right] \Delta \mathbf{Q}^{n+1} = -\Psi \left( \mathbf{Q}^{n+1(s)} \right) - |C| \left( a \mathbf{Q}^{n+1(s)} + b \mathbf{Q}^n + c \mathbf{Q}^{n-1} \right). \quad (20)$$

Следует отметить, что для упрощения вычислений матрицу Якоби  $\partial \Psi / \partial \mathbf{Q}$  можно брать от численного потока  $\Psi$ , конвективная часть которого определена на более узком шаблоне, чем шаблон  $\Omega_i$ , а именно на шаблоне схемы первого порядка. При этом улучшаются свойства матрицы оператора  $\left[ a|C| + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \left( \mathbf{Q}^{n+1(s)} \right) \right]$ , но порядок сходимости ньютоновских итераций снижается до линейного.

При наличии сходимости ньютоновских итераций приращение  $\Delta \mathbf{Q}^{n+1(s)} \rightarrow 0$ . В этом случае, согласно (20), предельное значение ньютоновского процесса  $\mathbf{Q}^{n+1}$  удовлетворяет полностью неявной консервативной схеме (19).

В представленных далее численных результатах расчёты проводились с использованием явной схемы интегрирования по времени, а именно  $N$ -шаговой линейной схемы Рунге-Кутты, где  $N$  выбиралось равным порядку аппроксимации пространственных производных.

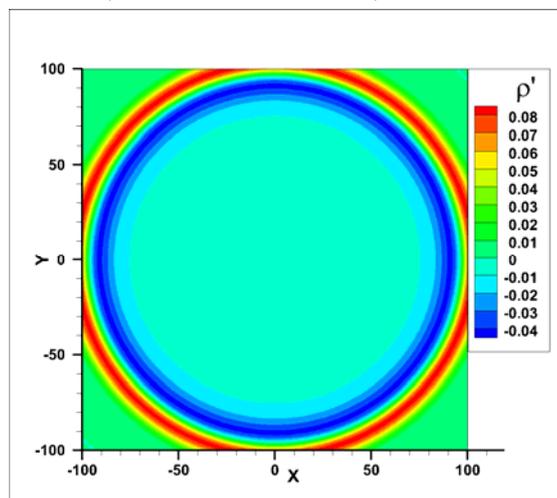
## 6. Численные результаты

**Экспериментальное исследование точности EBR схемы.** В качестве тестовой задачи, используемой для экспериментальной оценки точности EBR схемы на последовательности измельчающихся сеток, рассматривалась начальная задача в двумерной постановке о распространении гауссового импульса в расчетной области с открытыми границами. Она представляет собой упрощенную версию классической тестовой задачи по методам вычислительной аэроакустики, представленной на Втором семинаре по тестовым проблемам вычислительной аэроакустики [19]. В отличие от полной формулировки, в рассматриваемой постановке в качестве начальных условий задается только акустическое возмущение в виде

$$\rho(x, y, 0) = p(x, y, 0) = A \exp\left[-\frac{\ln 2}{b^2}(x^2 + y^2)\right],$$

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0.$$

Задача решается в области  $D = \{(x, y) : x, y \in [-100, 100]\}$ .



**Рис.9.** Решение задачи о распространении начального гауссового импульса: возмущение плотности на момент времени  $t = 100$  при  $A = 1$  и  $b = 6$ .

Таким образом, поставленная задача имеет известное аналитическое решение, поэтому ее удобно выбирать для тестирования численных алгоритмов. Численное решение на момент времени  $t = 100$  представлено на рис.9.

Амплитуда начального импульса бралась  $A = 1.0$ . При этом рассматривались две постановки задачи: с «хорошим» начальным разрешением импульса, соответствующим его полуширине  $b = 6$ , и с «плохим» начальным разрешением при  $b = 3$ .

Для экспериментальной оценки точности схемы расчеты проводились на двух сетках с измельчением шага в два раза. «Грубый» вариант «декартовой» сетки содержал 10201 узла при шаге  $\Delta x = \Delta y = 1$ . Ему соответствовали квазиравномерные неструктурированные сетки, состоящие примерно из такого же количества узлов. Процедура измельчения сеток показана на рис.10. При  $b = 3$  на полуширину гауссового импульса прихо-

дилось около трех точек грубых сеток и около шести точек измельченных сеток. При  $b = 6$  на полуширину гауссового импульса приходилось около шести точек грубых сеток и около двенадцати точек измельченных сеток.

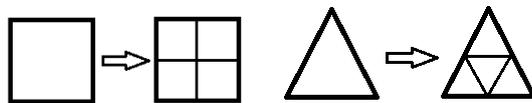


Рис.10. Процедура измельчения сеток, используемых в расчетах.

Помимо сеток декартовой структуры в расчетах использовалось два типа неструктурированных: «остроугольные» сетки, состоящие из почти правильных остроугольных треугольников, и «тупоугольные» сетки, состоящие только из тупоугольных треугольников. Вид трех используемых сеток, а также соответствующая им форма барицентрических и ортоцентрических ячеек показаны на рис.11-13.

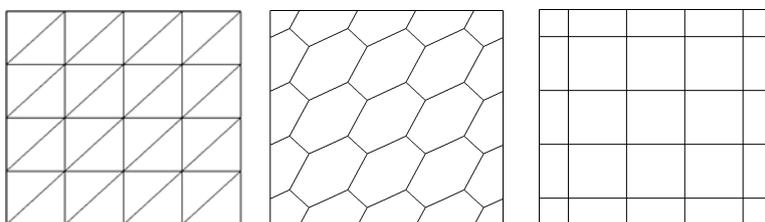


Рис.11. «Декартовая» сетка (слева) и соответствующие ей барицентрические (в центре) и ортоцентрические (справа) ячейки.

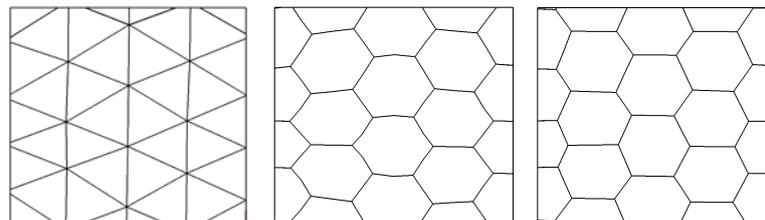


Рис.12. «Остроугольная» сетка (слева) и соответствующие ей барицентрические (в центре) и ортоцентрические (справа) ячейки.

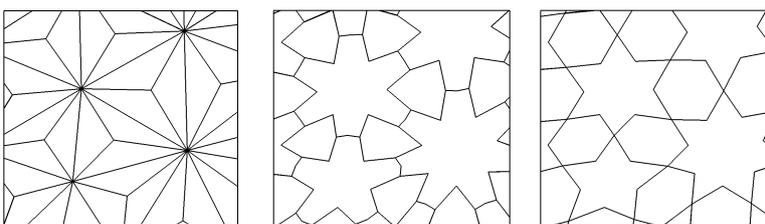


Рис. 13. «Тупоугольная» сетка (слева) и соответствующие ей барицентрические (в центре) и ортоцентрические (справа) ячейки.

На свободных границах расчетной области ставились неотражающие условия Тама (Ch.K.Tam) [20]. Заметим, что хорошее качество их работы уже видно на рис.9. Однако

чтобы гарантированно избежать возможных помех, приходящих из-за несовершенства граничных условий, точность численного решения оценивалась на момент времени  $t=40$ .

Результаты расчетов в виде таблиц, содержащих ошибки  $e_h = \|\rho_h - \rho_{ex}\|$  расчета пульсаций плотности  $\rho_h$  относительно точного решения  $\rho_{ex}$  в интегральных нормах  $L_1$  и  $L_2$ , а также эмпирическая оценка порядка точности схемы, приводятся в табл.1-3. Оценка порядка точности  $n$  проводилась по формуле

$$n = \frac{\ln e_{h_1} - \ln e_{h_2}}{\ln h_1 - \ln h_2},$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – высоты треугольников грубой сетки и измельченной сетки соответственно.

Точность различных вариантов схем сравнивается с точностью полиномиальной схемы P2 [21-22], использующей для реконструкции переменных квадратичные полиномы.

В приводимых таблицах ошибка на грубых сетках дается в верхней линии, а ошибка на измельченной сетке дается в нижней линии ячейки таблицы.

**Таблица 1.** Ошибки в интегральных нормах и оценка порядка точности схем при хорошем ( $b=6$ ) и плохом ( $b=3$ ) разрешении начального импульса (верхняя и нижняя таблицы соответственно) в случае «декартовой» сетки.

Схема:	P2	EBR3	EBR3	EBR5	EBR5
Ячейки:	бари- центрические	бари- центрические	орто- центрические	бари- центрические	орто- центрические
Норма $L_2$	<b>2.32</b> $2.856 \times 10^{-3}$ $5.732 \times 10^{-4}$	<b>2.38</b> $2.784 \times 10^{-3}$ $5.366 \times 10^{-4}$	<b>2.58</b> $4.492 \times 10^{-3}$ $1.606 \times 10^{-3}$	<b>4.35</b> $6.657 \times 10^{-4}$ $3.260 \times 10^{-5}$	<b>4.64</b> $3.401 \times 10^{-4}$ $1.368 \times 10^{-5}$
Норма $L_1$	<b>2.45</b> $1.305 \times 10^{-3}$ $2.384 \times 10^{-4}$	<b>2.50</b> $1.283 \times 10^{-3}$ $2.260 \times 10^{-4}$	<b>2.65</b> $1.753 \times 10^{-3}$ $5.586 \times 10^{-4}$	<b>4.48</b> $2.727 \times 10^{-4}$ $1.224 \times 10^{-5}$	<b>4.62</b> $1.519 \times 10^{-4}$ $6.162 \times 10^{-6}$

Схема:	P2	EBR3	EBR3	EBR 5	EBR5
Ячейки:	бари- центрические	бари- центрические	орто- центрические	бари- центрические	орто- центрические
Норма $L_2$	<b>1.23</b> $5.102 \times 10^{-3}$ $2.179 \times 10^{-3}$	<b>1.24</b> $5.122 \times 10^{-3}$ $2.164 \times 10^{-3}$	<b>1.48</b> $2.784 \times 10^{-3}$ $5.366 \times 10^{-4}$	<b>2.45</b> $3.111 \times 10^{-3}$ $5.710 \times 10^{-4}$	<b>2.98</b> $2.449 \times 10^{-3}$ $3.103 \times 10^{-4}$
Норма $L_1$	<b>1.42</b> $2.004 \times 10^{-3}$ $7.494 \times 10^{-4}$	<b>1.43</b> $2.028 \times 10^{-3}$ $7.509 \times 10^{-4}$	<b>1.65</b> $1.283 \times 10^{-3}$ $2.260 \times 10^{-4}$	<b>2.80</b> $1.228 \times 10^{-3}$ $1.760 \times 10^{-4}$	<b>3.27</b> $9.734 \times 10^{-4}$ $1.012 \times 10^{-4}$

Собранные в табл.1-3 данные показывают характерные свойства рассматриваемых схем. Как уже отмечено выше, существенно более низкие порядки при использовании всех исследуемых схем (P2 включительно) для расчетов с  $b=3$  объясняются специально выбранным плохим разрешением по сетке начального возмущения. В то же время, эти результаты показывают явное преимущество схем с квазиодномерной реконструкцией потоковых переменных (EBR3 и EBR5) в точности даже в случае «недекартовых» сеток, где они имеют теоретически только второй порядок.

При лучшем разрешении начального импульса ( $b=6$ ) для всех используемых сеток полиномиальная схема P2 всюду показывает близкий к третьему порядку аппроксимации. Однако и в этом случае для сеток, отличных от «декартовых», схемы с квазиодноразмерной реконструкцией потоковых переменных (EBR3 и EBR5) показывают точность второго порядка, заметно превышающую теоретическую.

В целом отметим, что схемы EBR3 и EBR5 имеют экспериментальный порядок ниже второго только на сетках из «тупоугольных» треугольников и только при плохом разрешении ( $b=3$ ) начального гауссового возмущения. Что характерно, в таких условиях полиномиальная схема P2 также дает оценки порядка ниже второго, причем даже несколько худшие по сравнению со схемой EBR5.

**Таблица 2.** Ошибки в интегральных нормах и оценка порядка точности схем при хорошем ( $b = 6$ ) и плохом ( $b = 3$ ) разрешении начального импульса (верхняя и нижняя таблицы соответственно) в случае «остроугольной» сетки.

Схема:	P2	EBR3	EBR3	EBR5	EBR5
Ячейки:	бари-центрические	бари-центрические	орто-центрические	бари-центрические	орто-центрические
Норма $L_2$	<b>2.60</b> $2.632 \times 10^{-3}$ $4.345 \times 10^{-4}$	<b>2.62</b> $2.554 \times 10^{-3}$ $4.145 \times 10^{-4}$	<b>2.61</b> $2.575 \times 10^{-3}$ $4.207 \times 10^{-4}$	<b>2.89</b> $7.147 \times 10^{-4}$ $9.662 \times 10^{-5}$	<b>2.74</b> $8.181 \times 10^{-4}$ $1.222 \times 10^{-4}$
	<b>2.68</b> $1.279 \times 10^{-3}$ $2.000 \times 10^{-4}$	<b>2.70</b> $1.259 \times 10^{-3}$ $1.934 \times 10^{-4}$	<b>2.70</b> $1.269 \times 10^{-3}$ $1.958 \times 10^{-4}$	<b>2.98</b> $3.376 \times 10^{-4}$ $4.282 \times 10^{-5}$	<b>2.88</b> $3.739 \times 10^{-4}$ $5.072 \times 10^{-5}$

Схема:	P2	EBR3	EBR3	EBR5	EBR
Ячейки:	бари-центрические	бари-центрические	орто-центрические	бари-центрические	орто-центрические
Норма $L_2$	<b>1.41</b> $5.124 \times 10^{-3}$ $1.924 \times 10^{-3}$	<b>1.40</b> $5.142 \times 10^{-3}$ $1.949 \times 10^{-3}$	<b>1.40</b> $5.109 \times 10^{-3}$ $1.943 \times 10^{-3}$	<b>2.87</b> $3.100 \times 10^{-3}$ $4.246 \times 10^{-4}$	<b>2.85</b> $3.073 \times 10^{-3}$ $4.251 \times 10^{-4}$
	<b>1.57</b> $2.054 \times 10^{-3}$ $6.943 \times 10^{-4}$	<b>1.55</b> $2.074 \times 10^{-3}$ $7.081 \times 10^{-4}$	<b>1.55</b> $2.060 \times 10^{-3}$ $7.055 \times 10^{-4}$	<b>3.07</b> $1.267 \times 10^{-3}$ $1.509 \times 10^{-4}$	<b>3.06</b> $1.257 \times 10^{-3}$ $1.503 \times 10^{-4}$

Чтобы проверить степень чувствительности схем с квазиодноразмерной реконструкцией потоковых переменных к качеству сетки, на следующем этапе исследований использовались неравномерные сетки, сильно разгружающиеся к краям области (рис.14). Принципиальным условием на качество таких сеток являлось требование хорошей разрешимости формы начального гауссового импульса.

Анализ полученных численных результатов на сетках разгружающейся структуры свидетельствует о конкурентоспособности схемы с квазиодноразмерной реконструкцией потоковых переменных и даже ее некотором преимуществе по сравнению с полиномиальной схемой теоретически третьего порядка точности.

В табл.4 и 5 собраны сводные данные по ошибкам численного решения в интегральной норме  $L_1$  по всем проведенным расчетам с использованием различных схем и их комбинаций, а также двух типов контрольных ячеек. Табличные данные также пока-

зывают, что в большинстве проведенных расчетов схемы с квазиодномерной реконструкцией потоковых переменных дают несколько меньшие ошибки по сравнению с полиномиальной схемой третьего порядка точности.

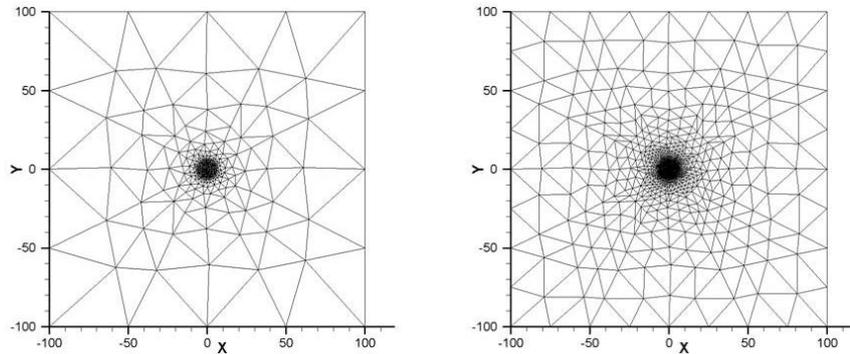


Рис.14. Грубая и измельченная сетки разгрубляющей структуры.

Таблица 3. Ошибки в интегральных нормах и оценка порядка точности схем при хорошем ( $b = 6$ ) и плохом ( $b = 3$ ) разрешении начального импульса (верхняя и нижняя таблицы соответственно) в случае «тупоугольной» сетки.

Схема:	P2	EBR3	EBR 3	EBR 5	EBR 5
Ячейки:	бари- центрические	бари- центрические	орто- центрические	бари- центрические	орто- центрические
Норма $L_2$	<b>2.43</b>	<b>2.33</b>	<b>2.25</b>	<b>1.94</b>	<b>2.58</b>
	$5.922 \times 10^{-3}$	$4.076 \times 10^{-3}$	$2.317 \times 10^{-3}$	$1.677 \times 10^{-3}$	$1.460 \times 10^{-3}$
Норма $L_1$	<b>2.66</b>	<b>2.44</b>	<b>2.35</b>	<b>2.04</b>	<b>2.62</b>
	$3.110 \times 10^{-3}$	$2.082 \times 10^{-3}$	$1.14894 \times 10^{-3}$	$8.410 \times 10^{-4}$	$6.763 \times 10^{-4}$
	$1.096 \times 10^{-3}$	$8.107 \times 10^{-4}$	$4.863 \times 10^{-4}$	$4.380 \times 10^{-4}$	$2.447 \times 10^{-4}$
	$4.908 \times 10^{-4}$	$3.846 \times 10^{-4}$	$2.25708 \times 10^{-4}$	$2.045 \times 10^{-4}$	$1.101 \times 10^{-4}$

Схема:	P2	EBR3	EBR3	EBR5	EBR5
Ячейки:	бари- центрические	бари- центрические	орто- центрические	бари- центрические	орто- центрические
Норма $L_2$	<b>1.16</b>	<b>1.10</b>	<b>1.21</b>	<b>1.49</b>	<b>1.78</b>
	$6.985 \times 10^{-3}$	$6.180 \times 10^{-3}$	$4.854 \times 10^{-3}$	$4.552 \times 10^{-3}$	$3.636 \times 10^{-3}$
Норма $L_1$	<b>1.33</b>	<b>1.22</b>	<b>1.34</b>	<b>1.69</b>	<b>1.98</b>
	$2.959 \times 10^{-3}$	$2.558 \times 10^{-3}$	$1.962 \times 10^{-3}$	$1.930 \times 10^{-3}$	$1.466 \times 10^{-3}$
	$3.134 \times 10^{-3}$	$2.881 \times 10^{-3}$	$2.101 \times 10^{-3}$	$1.622 \times 10^{-3}$	$1.057 \times 10^{-3}$
	$1.180 \times 10^{-3}$	$1.099 \times 10^{-3}$	$7.736 \times 10^{-4}$	$5.992 \times 10^{-4}$	$3.722 \times 10^{-4}$

Анализ полученных численных результатов на сетках разгрубляющей структуры свидетельствует о конкурентоспособности EBR схем и их некотором преимуществе по сравнению с полиномиальной схемой теоретически третьего порядка точности. Выигрыш становится более весомым, если принять во внимание заметно более низкие вычислительные затраты на реализацию EBR схем по сравнению со схемами, использующими полные полиномы для реконструкции переменных.

**Таблица 4.** Ошибки в норме  $L_1$  в порядке увеличения, полученные при использовании различных схем и типов ячеек на измельченной сетке.

№	Схема	Измельченная сетка
1	EBR5 – ортоцентрические ячейки	$2.71769 \times 10^{-3}$
2	EBR5 – барицентрические ячейки	$2.78292 \times 10^{-3}$
3	P3 – барицентрические ячейки	$3.33523 \times 10^{-3}$
4	EBR3 – ортоцентрические ячейки	$3.44147 \times 10^{-3}$
5	EBR3 – барицентрические ячейки	$3.53714 \times 10^{-3}$

**Таблица 5.** Ошибки в норме  $L_1$  в порядке увеличения, полученные при использовании различных схем и типов ячеек на грубой сетке.

№	Схема	Грубая сетка
1	EBR5 – ортоцентрические ячейки	$4.91049 \times 10^{-3}$
2	EBR5 – барицентрические ячейки	$5.07789 \times 10^{-3}$
3	EBR3 – ортоцентрические ячейки	$5.52637 \times 10^{-3}$
4	EBR3 – барицентрические ячейки	$5.55023 \times 10^{-3}$
5	P3 – барицентрические ячейки	$5.81536 \times 10^{-3}$

### Заключение

Дано подробное описание EBR схемы, основанной на реберно-ориентированной квазиодномерной реконструкции переменных. Такой подход обеспечивает повышенную точность расчета уравнений Эйлера на неструктурированных сетках при сохранении относительно низких вычислительных затрат по сравнению с полиномиальными схемами. К настоящему времени EBR схема реализована в программном комплексе NOISEtte [23], предназначенном для расчетов задач аэродинамики и аэроакустики. В коде NOISEtte она является базовым алгоритмом при моделировании турбулентных течений на основе подходов DNS, RANS, LES, а также гибридных RANS-LES подходов семейства DES [24].

Дальнейшее развитие EBR схемы предполагает оснащение ее техникой поддержки решений с большими градиентами, включая разрывы, в рамках WENO [25] и TVD [13] методов, а также исследование возможности построения ее аналога, основанного на одномерных полиномах, с целью улучшения качества счета на неоднородных сетках.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stolarski T., Nakasone Y., Yoshimoto S.* Engineering Analysis with ANSYS Software. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2006.
2. Fluent. User's Guide Fluent 6.3.26. Lebanon, NH: Fluent Incorporated, 2006.
3. *Li B.Q.* Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer. London: Springer, 2006.
4. *Zhang Y.-T., Shu C.-W.* Third Order WENO Scheme on Three Dimensional Tetrahedral Meshes // Commun. Comput. Phys., 2009, v.5, № 2-4, p.836-848.
5. *Dumbser M., Käser M.* Arbitrary high order non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for linear hyperbolic systems // J. Comput. Phys., 2007, v.221, № 2, p.693-723.

6. *Tsoutsanis P., Titarev V.A., Drikakis D.* WENO schemes on arbitrary mixed-element unstructured meshes in three space dimensions // *J. Comput. Phys.*, 2011, v.230, № 2, p.1585-1601.
7. *Wolf W.R., Azevedo J.L.F.* High-order ENO and WENO schemes for unstructured grids // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2007, v.55, № 10, p.917-943.
8. *Debiez C.* Approximations décentrées à faible dissipation pour des problèmes hyperboliques. INRIA Report 2811, Février, 1996.
9. *Abalakin I.V., Kozubskaya T.K., Dervieux A.* High Accuracy Finite Volume Method for Solving Nonlinear Aeroacoustics Problems on Unstructured Meshes // *Chinese Journal of Aeronautics*, 2006, v. 19, № 2, p.97-104.
10. *Абалакин И.В., Козубская Т.К.* Многопараметрическое семейство схем повышенной точности для линейного уравнения переноса // *Математич. моделиров.*, 2007, т.19, № 7, с.56-66.
11. *Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.* Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1985, 364 с.
12. *Оран Э., Борис Дж.* Численное моделирование реагирующих потоков. – М.: Мир, 1990, 660 с.
13. *Chakravarthy S.R. and Osher S.* A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws. AIAA Paper 85-0363, New York, 1985.
14. *Roe P.L.* Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes // *J. Comput. Phys.*, 1981, v.43, № 2, p.357-372.
15. *Wu H. and Wang L.* Non-existence of third order accurate semi-discrete MUSCL-type schemes for nonlinear conservation laws and unified construction of high accurate ENO schemes. – In Proceedings of the 6th International Symposium on CFD, Lake Tahoe, USA, September 4-8, 1995.
16. *Huang L.C.* Pseudo-Unsteady Difference Schemes for Discontinuous Solution of Steady-State, One-Dimensional Fluid Dynamics Problems // *J. Comput. Phys.*, 1981, v.42, № 1, p.195-211.
17. *Gourvitch N., Rogé G., Abalakin I., Dervieux A., Kozubskaya T.* A tetrahedral-based superconvergent scheme for aeroacoustics, INRIA Report 5212, May, 2004.
18. *Jameson A.* Numerical Solution of the Euler Equations for Compressible inviscid Fluids, Numerical. Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics, SIAM, Philadelphia, 199, 1985.
19. Proceedings of ICASE/LaRC. Workshop on Benchmark Problems in Computational Aeroacoustics (CAA). Ed. J.C. Hardin, J.R. Ristorcelli, C.K.W.Tam. NASA Conference Publication 3300, May 1995.
20. *Tam C.K.W., Webb J.C.* Dispersion-relation-preserving finite-difference schemes for computational acoustics // *J. Comput. Phys.*, 1993, v.107, №2, p.262-281.
21. *Kozubskaya T., Abalakin I., Dervieux A., Ouvrard H.* Accuracy Improvement for Finite-Volume Vertex-Centered Schemes Solving Aeroacoustics Problems on Unstructured Meshes. 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Stockholm, Sweden, June 2010. AIAA paper 2010-3933, 2010.
22. *Абалакин И.В., Дервяё А., Козубская Т.К., Уваров Х.* Методика повышения точности при моделировании переноса акустических возмущений на неструктурированных сетках // *Учёные записки ЦАГИ*, 2010, т.XLI, № 1, с.110-125.
23. *Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К.* Параллельный программный комплекс NOISETTE для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // *Вычислительные методы и программирование*, 2012, т.13, с.110-125.
24. *Волков К.Н., Емельянов В.Н.* Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, 368 с.
25. *Liu X-D., Osher S., Chan T.* Weighted essentially non-oscillatory schemes // *J. of Comput. Phys.*, 1994, v.115, p.200-212.

Поступила в редакцию 29.04.2013.