

УДК 532.529.6:534.12

УСЛОВИЕ РЕЗОНАНСНОГО ДРОБЛЕНИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЕ В ЖИДКОСТИ

© 2016 г. В. В. Вановский^{1,2,*}, А. Г. Петров^{1,2}

Представлено академиком РАН Р.И. Нигматулиным 18.05.2015 г.

Поступило 19.05.2015 г.

Построена линейная теория затухания радиальных колебаний пузырька в жидкости с учетом основных диссипативных механизмов: термического, вязкого и акустического. Основное сделанное приближение гомобаричности помогло получить результаты в удобной и простой форме. Полученные результаты для затухания используются далее при описании вынужденных резонансных колебаний пузырька в акустической волне с частотой, равной собственной частоте радиальной моды и в два раза большей частоты колебаний деформационной моды (резонанс 2:2:1). Показано, что при относительно небольшой амплитуде давления возбуждающей акустической волны развивается достаточно большая амплитуда деформационных колебаний для дробления, а также появляются субгармоники в спектре акустического излучения. Получено условие дробления пузырька для быстрого и медленного старта акустической волны.

DOI: 10.7868/S0869565216200111

1. Задача дробления пузырька в акустической волне имеет приложения в медицине, океанологии, а также соотносится со многими другими проблемами кавитации и сонолюминесценции. Например, имеются экспериментальные подтверждения того факта, что с помощью дробления пузырьков ультразвуком вблизи гематоэнцефалического барьера можно обеспечить доставку препаратов в мозговые ткани [1], что является одной из основных проблем лечения болезней мозга. Механизм дробления пузырька до сих пор не получил полного описания, несмотря на большое количество научных работ по этой теме. Проблема затухания акустической волны в пузырьковой среде изучена гораздо лучше и имеет множество мирных и военных приложений вследствие того, что пузырьковая среда является одним из самых сильных известных диссипаторов акустической энергии.

Существует много экспериментальных подтверждений того факта, что пузырьки в акустической волне излучают на субгармонических частотах, делящих нацело частоту волны [2]. Такие субгармоники могут возникать вследствие несфе-

рических колебаний пузырька, находящихся в целочисленном резонансе частот с радиальной модой. Также существует множество экспериментальных подтверждений возможности дробления пузырька из-за деформационных колебаний его формы [3]. Обычно деформационные колебания пузырька возникают вследствие нелинейного взаимодействия между его колебательными модами. Во многих теоретических исследованиях показано, что энергия гораздо сильнее перекачивается из радиальной в деформационную моду при соотношении частот колебаний 2:1 [4, 5]. Возможность дробления пузырька вследствие такой усиленной перекачки энергии была предсказана в дальнейших работах [6, 7], где изучен эффект перекачки энергии между модами для свободных колебаний пузырька. В этих работах получены период перекачки энергии и отношение амплитуд мод, сильно возрастающее с увеличением номера моды n . Однако основным их недостатком было рассмотрение только свободных колебаний пузырька без диссипации, которая, как известно [8], довольно велика. Таким образом, для оценки возможности дробления по резонансному механизму требуется построить теорию с учетом диссипации и вынуждающей силы, что и сделано настоящей работе. Также в работах [6, 7] показано, что наибольшее увеличение амплитуды колебаний происходит при перекачке энергии в осесимметричные деформационные моды, поэтому они и рассматриваются в представленной работе.

Рассмотрены вынужденные колебания газового пузырька в поле акустической волны, резо-

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Долгопрудный Московской обл.

² Институт проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук,
Москва

*E-mail: vovici@gmail.com

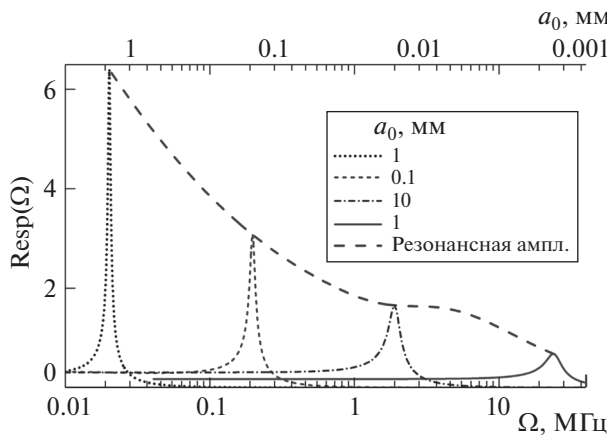


Рис. 1. Резонансные кривые для воздушных пузырьков в воде разного размера и их огибающая. По верхней оси отложен резонансный размер пузырька, по нижней – соответствующая ему резонансная частота.

нансной по отношению к радиальной моде. Предполагается, что радиальная мода находится в резонансе 2:1 с n -й осесимметричной деформационной модой. Все важные механизмы диссипации энергии (тепловой, акустической и вязкой) радиальных колебаний учтены в линейном гомобаричном приближении, как это сделано в [8]. Для деформационной моды диссипацией можно пренебречь, так как основной термический эффект пренебрежимо мал в этом случае, а вязкий эффект сильно уменьшается с ростом номера моды n . Задача о перекачке энергии решается с помощью эффективной техники осреднения Крылова–Боголюбова [9]. Из полученных результатов выводится эмпирический критерий дробления пузырька для случая быстрого и медленного старта возбуждающей акустической волны.

2. Рассмотрим сферический газовый пузырек, колеблющийся с частотой Ω в акустической волне с давлением $p = p_\infty(1 + Fe^{i\Omega t})$, p_∞ – давление в жидкости без акустической волны, F – безразмерная амплитуда волны. В линейном приближении радиус пузырька $a = a_0(1 + Ae^{i\Omega t})$, a_0 – равновесный радиус пузырька, A – безразмерная амплитуда колебаний пузырька. В приближении гомобаричности отношение безразмерной амплитуды колебаний к амплитуде возбуждающей волны задается формулой, выведенной аналогично [8]:

$$\text{Resp}(\Omega) = \frac{A(\Omega)}{F} = \left(\frac{\text{Dy}}{1+i \cdot \text{Ma}} + \text{St} - i \cdot \text{Vis} - \frac{3}{\frac{1}{1+\text{St}} - \frac{\gamma-1}{\gamma}(1-3G)} \right)^{-1}, \quad (1)$$

$$G = \frac{\sqrt{i \cdot \text{Pe}} \operatorname{cth} \sqrt{i \cdot \text{Pe}} - 1}{i \cdot \text{Pe}}.$$

Здесь $\text{Resp}(\Omega)$ – величина отклика колеблющегося пузырька на его внешнее воздействие, G – функция числа Пекле. Она зависит от пяти безразмерных чисел:

$$\text{St} = \frac{2\sigma}{a_0 p_\infty}, \quad \text{Dy} = \frac{\rho a_0^2 \Omega^2}{p_\infty}, \quad \text{Vis} = \frac{4\mu\Omega}{p_\infty},$$

$$\text{Ma} = \frac{a_0 \Omega}{c}, \quad \text{Pe} = \frac{a_0^2 \Omega}{k}.$$

Первые три – это отношения капиллярного, динамического и вязкого давлений к p_∞ ; ρ , σ , μ – плотность, коэффициенты поверхностного натяжения и динамической вязкости жидкости соответственно; Ma , Pe – числа Маха и Пекле; c , k – скорость звука в жидкости и коэффициент температуропроводности газа. На рис. 1 изображены резонансные кривые для воздушных пузырьков различных радиусов в воде и их огибающая.

С учетом n -й деформационной моды колебаний форма пузырька в сферических координатах r , θ определяется уравнением: $r(\theta, \tau) = a_0(1 + x(\tau) + \xi(\tau)P_n(\eta))$, $\eta = \cos\theta$, $\tau = \Omega t$. Здесь $P_n(\Omega)$ – полином Лежандра. Из условия резонанса собственных частот радиальной и деформационной мод 2:1 можно получить резонансный радиус пузырька

$$a_0 = \left(\frac{2(n-1)(n+1)(n+2)+1}{3\gamma} - 1 \right) \frac{2\sigma}{p_\infty}. \quad (2)$$

Для пузырьков такого размера возбуждается только n -я деформационная мода. Зависимость резонансного радиуса воздушного пузырька в воде при атмосферном давлении от номера деформационной моды изображена на рис. 2.

Вводятся переменные x и $y = \xi/\sqrt{(n+1)(2n+1)}$, где x и ξ – соответственно безразмерные амплитуды радиальной и деформационной мод. В этих переменных записываются следующие уравнения, учитывающие квадратичные резонансные члены и диссипацию (1):

$$\begin{aligned} \dot{x} - u &= -(n+3)uv, \\ \dot{u} + 4x &= \frac{3}{2}v^2 - 4(n+1)y^2 - \alpha \cos 2\tau - \beta u, \\ \dot{y} - v &= -(n+3)yu - 3xv, \\ \dot{v} + y &= (n+3)uv - 8(n+1)xy. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь дифференцирование обозначено точкой и ведется по безразмерному времени $\tau = \Omega t$, а частота акустической волны принимается равной частоте радиальной моды.

Учитывая (1), с помощью уравнений Лагранжа можно связать искусственно введенные коэффициенты возбуждающей силы и диссипации на резонансной частоте с их физическими значениями:

$$\frac{\alpha}{F} = \frac{4}{3\gamma} - \frac{2 - 2/(3\gamma)}{(n-1)(n+1)(n+2)} \approx \frac{4}{3\gamma},$$

$$\beta = \frac{1}{2\text{Resp}(\Omega)F} \frac{\alpha}{3\gamma\text{Resp}(\Omega)} \approx \frac{2}{3\gamma\text{Resp}(\Omega)}.$$

Далее, следуя стандартной методике Крылова–Боголюбова, ищем решение в следующем виде:

$$x = \epsilon^2(\tilde{x} - x_0), \quad u = \epsilon^2\left(\tilde{u} + (n+3)\frac{\Lambda^2}{2}\sin 2\tau\right),$$

$$y = \epsilon\Lambda\sin\tau + \epsilon^2\tilde{y}, \quad v = \epsilon\Lambda\cos\tau + \epsilon^2\tilde{v}, \quad (4)$$

$$\Lambda = \pm\frac{2}{\sqrt{4n-1}}, \quad x_0 = \frac{8n+5}{4(4n-1)}.$$

После подстановки (4) в (3) получается система канонического вида для применения методики осреднения:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} - \tilde{u} &= \epsilon A_1, & \dot{\tilde{u}} + 4\tilde{x} &= \epsilon A_2, \\ \dot{\tilde{y}} - \tilde{v} &= \epsilon A_3, & \dot{\tilde{v}} + \tilde{y} &= \epsilon A_4, \\ A_1 &= -(n+3)\Lambda(\tilde{y}\cos\tau + \tilde{v}\sin\tau), \\ A_2 &= -8(n+1)\Lambda\tilde{y}\sin\tau + 3\Lambda\tilde{v}\cos\tau - \\ &\quad -\beta_1(\tilde{u} + (n+3)(\Lambda^2/2)\sin 2\tau), \\ A_3 &= -3\Lambda\cos\tau(\tilde{x} - x_0) - \\ &\quad -(n+3)\Lambda\sin\tau(\tilde{u} + (n+3)(\Lambda^2/2)\sin 2\tau), \\ A_4 &= -8(n+1)\Lambda\sin\tau(\tilde{x} - x_0) + \\ &\quad +(n+3)\Lambda\cos\tau(\tilde{u} + (n+3)(\Lambda^2/2)\sin 2\tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Правая часть системы (5) имеет первый порядок малости по параметру ϵ , потому можно воспользоваться первой теоремой Боголюбова и действовать по стандартной методике, заключающейся в записи решения системы без правых частей (гармонические колебания), затем подстановке этих решений в правые части и усреднении по времени. Решая полученную линейную систему дифференциальных уравнений, получаем асимптотическое решение, устойчивое по второй теореме Боголюбова (отрицательная действительная часть собственных чисел системы):

$$x(\tau) = -\alpha\left(\frac{8n(9n+16)+97}{(4n-1)^2}\cos 2\tau + \frac{8n+5}{4(4n-1)}\right) + \tilde{x}(\tau)e^{-\beta\tau/4},$$

$$y(\tau) = \pm\sqrt{\alpha}\left(\frac{2}{\sqrt{4n-1}}\sin\tau - \frac{10n(8n+15)+91}{(4n-1)^{5/2}}\beta\cos\tau\right) + \tilde{y}(\tau)e^{-\beta\tau/4}. \quad (6)$$

Здесь $\tilde{x}(\tau)$ и $\tilde{y}(\tau)$ – быстро осциллирующие функции с медленно меняющейся амплитудой, определяются из начальных условий. На рис. 3 полученное аналитически асимптотическое решение

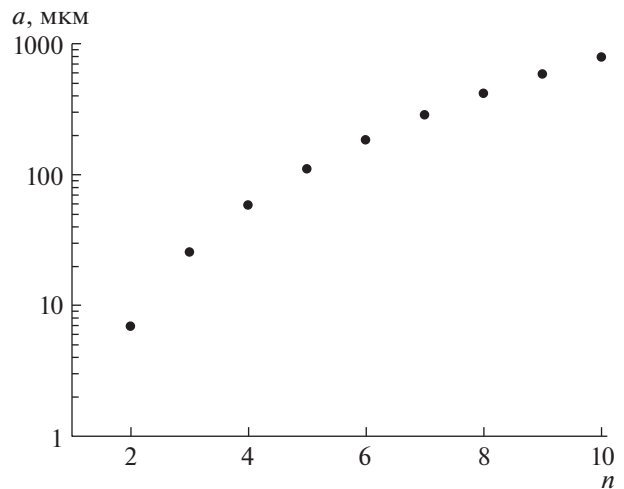


Рис. 2. Радиус воздушного пузырька в воде в зависимости от номера деформационной моды, собственная частота которой в два раза меньше частоты радиальной моды.

(6) (внизу) сравнивается с точным численным моделированием начальной системы (3) (вверху) для тех же начальных условий. Функции $x(\tau)$ и $y(\tau)$ изображены более светлой и более темной линиями ($y(\tau)$ имеет больший размах, чем $x(\tau)$). Левая часть графиков описывает поведение системы при установлении колебаний $\tau < 900$, правая же часть описывает уже установившиеся колебания при $9970 < \tau < 10000$, при начальных условиях: $\alpha = 0.0001, \beta_1 = 1, n = 19/8, x(0) = -0.004, u(0) = -0.01, y(0) = -0.002, v(0) = 0.004$. Таким образом, полученное асимптотическое решение описывает установившиеся колебания с большой точностью и даже качественно переходный процесс установления колебаний. Амплитуда колебаний практически не меняется при небольшой расстройке частоты (порядка $\sqrt{\alpha}$) и изменении коэффициента затухания.

Предполагается возможность дробления при достижении амплитуды деформационной моды значения $\xi = 1/2$. При этом значении пузырек оказывается разделенным на несколько частей перешейком. Как видно из рис. 3, максимальная амплитуда деформационной моды достигается во время переходного процесса и почти в два раза больше установившейся. Поэтому целесообразно рассмотреть две различные возможности дробления: когда амплитуда акустической волны медленно растет и когда акустическая волна включается резко и максимальная амплитуда достигается во время переходного процесса. Получен эмпирический критерий дробления пузырька как минимальная амплитуда возбуждающей волны, при которой возможно дробление, в этих двух случаях. Для “быстрого” старта возбуждающей

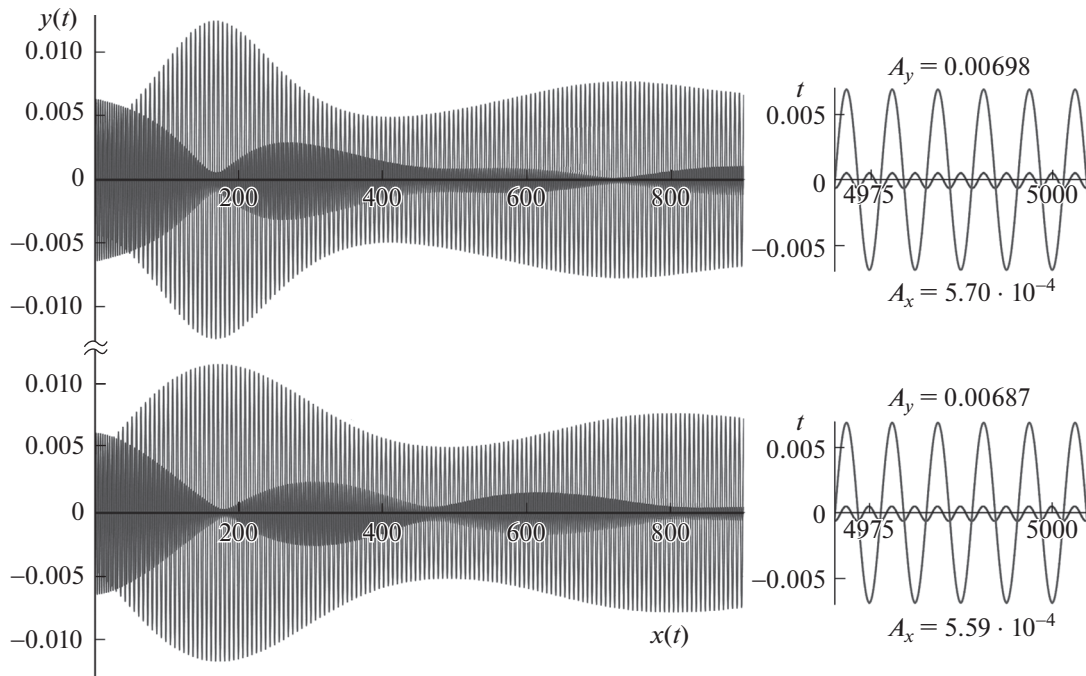


Рис. 3. Сравнение численного (вверху) и асимптотического (внизу) решений. Более темной кривой изображено поведение радиальной моды колебаний, более светлой — деформационной. В левой части отражен переходный процесс, в правой — установившиеся колебания. A_y , A_x — амплитуды установившихся колебаний по радиальной и деформационной модам.

волны $\tau_{start} \approx 30/\Omega$ найдено условие дробления в виде $F > F_{min1}$. Зависимость F_{min1} от номера моды n изображена на рис. 4 кружочками. При медленном старте минимальная амплитуда возбуждающей волны для дробления

$$F_{min2} = \frac{3(4n-1)\gamma}{32(n+1)(2n+1)} \approx \frac{\gamma}{5n}$$

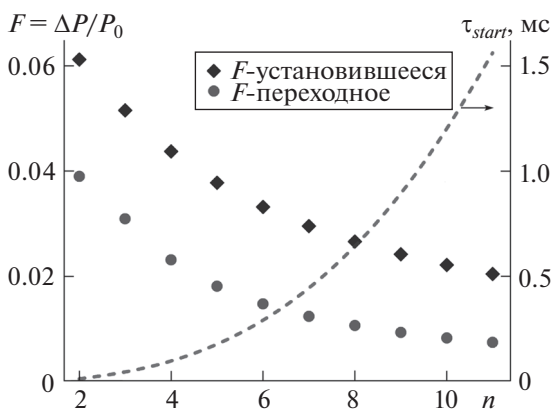


Рис. 4. Оценочное условие дробления пузырька и характерное время быстрого старта акустической волны в зависимости от номера моды. Левая ось отражает отношение амплитуды переменной части давления в акустической волне к среднему значению давления, правая ось — характерное время “быстрого” старта акустической волны.

изображена на рис. 4 ромбами. Штриховой линией показано характерное время старта акустической волны τ_{start} (время достижения полной мощности), чтобы ее можно было считать быстрой. Рассматриваются пузырьки только резонансного радиуса (2).

Для примера рассмотрим случай дробления воздушного пузырька в воде по четвертой моде. Из рис. 2 заключаем, что резонансному соотношению для $n = 4$ соответствует пузырек радиуса $a \approx 60$ мкм. Для 4-й моды при медленном старте $\tau_{start} > 0.1$ мс критическая амплитуда внешнего давления составляет примерно 4.3% от атмосферного, при быстром старте примерно 2.3%.

Предложен новый резонансный механизм дробления газового пузырька в акустической волне. Показано, что дробление пузырька с резонансным радиусом (2) возможно при относительно небольшой амплитуде давления в возбуждающей волне: порядка нескольких процентов от постоянной части давления. Получено оценочное условие дробления. Для его полного обоснования в дальнейшем планируется провести точные расчеты с учетом сильных деформаций поверхности пузырька и затухания деформационной моды, а также требуются экспериментальные исследования. Данный механизм дробления может иметь широкие приложения, в том числе в медицине для прорыва гематоэнцефалического барьера.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14–19–01633).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Choi J.J.* // Phys. Med. Biol. 2007. V. 52. P. 5509–5530.
2. *Neppiras E.M.* Acoustic Cavitation // Phys. Rept. 1980. V. 61. P. 159–251.
3. *Leighton T.G.* Ph.D. Thesis. Cambridge: Cambridge Univ., 1988.
4. *Longuet-Higgins M.S.* // J. Fluid Mech. 1991. V. 225. P. 531–549.
5. *Ffowes Williams J.E., Guo Y.P.* // J. Fluid Mech. 1991. V. 224. P. 507–529.
6. *Вановский В.В., Петров А.Г.* // ДАН. 2011. Т. 437. № 3. С. 331–335.
7. *Вановский В.В., Петров А.Г.* // ДАН. 2012. Т. 444. № 4. С. 385–389.
8. *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1997.
9. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. М.: Наука, 1974.