УДК 004

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕТА КВАДРОКОПТЕРА С НЕЛИНЕЙНЫМ МОДЕЛЬНО-ПРОГНОЗИРУЮЩИМ РЕГУЛЯТОРОМ

Ф.Н. ФАХРЕТДИНОВА
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ
Казань, Россия

Квадрокоптеры широко используются для самых разных гражданских и военных целей благодаря их низкой стоимости, высокой маневренности, свойствам вертикального взлета и посадки, небольшим размерам и возможности зависания. В последние годы стал очевиден тот факт, что многие люди предпочитают вращающиеся беспилотные летательные аппараты во многих областях, таких как фотосъемка, поиск и спасание, аварийное реагирование и это показывает, что управление квадрокоптерами по-прежнему остается одной из актуальных тем. Нелинейная, многовариантная, связанная и недоуправляемая динамика квадрокоптеров делает их моделирование и управление сложной конструкторской задачей.

Рассмотрим квадрокоптер (рис. 1) и опишем его математическую модель.

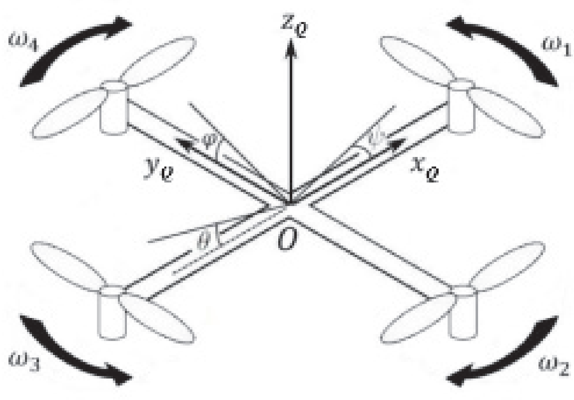

Рис. 1 Модель квадрокоптера

Примем следующие допущения: квадрокоптер симметричен относительно осей *x* и *y,* рама квадрокоптера и его винты абсолютно жесткие, каждый двигатель располагается на конце стержня, тяга, создаваемая каждым винтом, перпендикулярна плоскости *x-y*.

Для описания состояния рассматриваемого аппарата используются следующие векторы:

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \ k = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где ξ – вектор, описывающий линейное положение квадрокоптера в инерциальной системе координат *Oxyz*, η – вектор, описывающий угловое положение квадрокоптера, *k* – вектор состояния, полностью описывающий положение и ориентацию квадрокоптера в инерциальной системе координат. Линейные и угловые скорости квадрокоптера в подвижной системе координат заданы следующими векторами:

$$V_Q = \begin{bmatrix} V_{Qx} \\ V_{Qy} \\ V_{Qz} \end{bmatrix}, \ \mathrm{v} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где V_Q – вектор линейных скоростей относительно подвижной СК $Ox_Qy_Qz_Q$, V_{Qx} – линейная скорость по оси x_Q, V_{Qy} – линейная скорость по оси y_Q, V_{Qz} - линейная скорость по оси z_Q, v – вектор угловых скоростей относительно подвижной системы координат, *p* – угловая скорость по оси x_Q, q – угловая скорость по оси y_Q, *r* – угловая скорость по оси z_Q.

Матрица *R* преобразования координат из подвижной системы координат в инерциальную представляет собой последовательное перемножение матриц перехода по каждой координате:

$$R = R_z \cdot R_y \cdot R_x, \tag{3}$$

где, R_z – матрица поворота по оси *z*, R_y – матрица поворота по оси *y*, R_x – матрица поворота по оси *x*:

Связь между линейными скоростями в инерциальной и связанной с квадрокоптером системы координат определяется выражением:

$$\dot{\xi} = RV_Q, \tag{6}$$

Преобразование угловых скоростей из инерциальной системы координат в подвижную, связанную с квадрокоптером, производится с помощью матрицы *W*, обратный же переход из подвижной системы координат в неподвижную, связанную с землей, производится с помощью матрицы W^{-1}.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi c_\theta \\ 0 & -s_\varphi & c_\varphi c_\theta \end{bmatrix}, \ W^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s_\varphi t_\theta & c_\varphi t_\theta \\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi \\ 0 & \frac{s_\varphi}{c_\theta} & \frac{c_\varphi}{c_\theta} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\mathrm{v} = W\dot{\eta},\ \dot{\eta} = W^{-1}\mathrm{v}, \tag{8}$$

где $t_x = \mathrm{tg}\, x$.

Квадрокоптер, как описываемый объект управления имеет шесть степеней свободы. Будем предполагать, что квадрокоптер имеет симметричную структуру. Тогда тензор инерции имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где J – тензор инерции квадрокоптера, J_x – момент инерции квадрокоптера по оси x_Q, J_y – момент инерции квадрокоптера по оси y_Q, J_z – момент инерции квадрокоптера по оси z_Q.

Пропеллеры квадрокоптера, совершая вращения с угловыми скоростями ω_i $(i = \overline{1,4})$, создают силы тяги F_i, направленные по осям вращения (рис. 2). Упрощенные выражения для силы тяги и вращающего момента имеют следующий вид:

$$\begin{cases} F_i = k\omega_i^2, \\ \tau_i = b\omega_i^2 + J_m\dot{\omega}_i \end{cases}, i = \overline{1,4}, \tag{10}$$

где J_m – момент инерции мотора, k – коэффициент подъемной силы, b – коэффициент трения. Вектор вращающих моментов τ_Q содержит вращающие моменты по всем трем углам Эйлера $(\tau_\varphi, \tau_\theta, \tau_\psi)$.

$$F = \sum_{i=1}^{4} F_i = k\sum_{i=1}^{4} \omega_i^2 = k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2),\ F_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\tau_Q = \begin{bmatrix} \tau_\varphi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kl_r(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ kl_r(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ b(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где ω_i – скорость вращения i-го винта, рад/с; l_r – расстояние от центра масс до оси вращения пропеллера, м; k и b экспериментально определяемые постоянные.

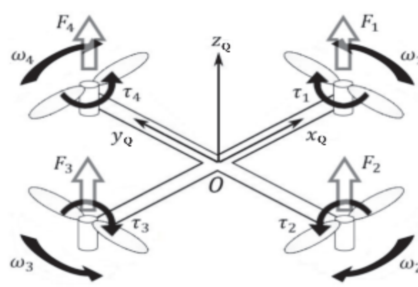

Рис. 2. Силы и крутящие моменты, действующие на квадрокоптер

Для описания динамики квадрокоптера как твердого тела используются уравнения Ньютона-Эйлера В связанной системе координат для описания динамики квадрокоптера используются уравнение вида:

$$M\left(\dot{V}_Q + \mathrm{v} \times V_Q\right) = R^{\mathrm{T}}G + F_Q, \tag{13}$$

где M – масса всего квадрокоптера, $M\dot{V}_Q$– сила, необходимая для ускорения квадрокоптера, $\mathrm{v} \times MV_Q$ – центробежная сила, $R^{\mathrm{T}}G$ – гравитационная сила. В инерциальной системе координат центробежные силы равны нулю. Таким образом, только направление и сила тяги, а также сила тяжести влияют на ускорение квадрокоптера:

$$M\ddot{\xi} = G + RF_Q$$

В связанной системе координат уравнения углового движения квадрокоптера имеют вид

$$J\dot{\mathrm{v}} + \mathrm{v} \times (J\mathrm{v}) = \tau_Q, \tag{14}$$

где $J\dot{\mathrm{v}}$ – угловое инерционное ускорение, $\mathrm{v} \times (J\mathrm{v})$ - центростремительная сила, τ_Q – внешний момент сил. Принимая углы достаточно малыми, запишем:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(J_y - J_z)\dot{\theta}\dot{\psi}}{J_x} + \frac{\tau_\varphi}{J_x} \\ \frac{(J_z - J_x)\dot{\varphi}\dot{\psi}}{J_y} + \frac{\tau_\theta}{J_y} \\ \frac{(J_x - J_y)\dot{\varphi}\dot{\theta}}{J_z} + \frac{\tau_\psi}{J_z} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Запишем выражения для тяги и моментов (11), (12):

$$\tau_\varphi = kl_r(\omega_4^2 - \omega_2^2), \tag{16}$$

$$\tau_\theta = kl_r(\omega_3^2 - \omega_1^2), \tag{17}$$

$$\tau_\psi = b(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2), \tag{18}$$

$$F = k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2), \tag{19}$$

где ω_i – скорость вращения i-го винта, рад/с; k и b экспериментально определяемые постоянные.

Также на квадрокоптер действует сила тяжести:

$$F_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Эту систему необходимо дополнить силой аэродинамического сопротивления. В итоге математическая модель квадрокоптера приобретает следующий вид:

$$
\begin{cases}
\ddot{x} = \frac{F}{M}\left(c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi\right) - A_x\dot{x} \\
\ddot{y} = \frac{F}{M}\left(c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi\right) - A_y\dot{y} \\
\ddot{z} = \frac{F}{M}c_\varphi c_\theta - g - A_z\dot{z} \\
\ddot{\varphi} = \frac{(J_y - J_z)\dot{\theta}\dot{\psi}}{J_x} + \frac{\tau_\varphi}{J_x} \\
\ddot{\theta} = \frac{(J_z - J_x)\dot{\varphi}\dot{\psi}}{J_y} + \frac{\tau_\theta}{J_y} \\
\ddot{\psi} = \frac{(J_x - J_y)\dot{\varphi}\dot{\theta}}{J_z} + \frac{\tau_\psi}{J_z}
\end{cases} \tag{21}
$$

В качестве закона управления квадрокоптером используется нелинейное модельное прогнозирующее управление, полученное в результате минимизации следующего критерия:

$$
\min_{u,x} \int_0^T \left(\left\|x(t) - x_{ref}\right\|^2 + \left\|u(t) - u_{ref}\right\|^2\right) dt, \tag{22}
$$

при ограничениях $\dot{x} = f(x,u)$, $u(t) \in U$, $x(0) = x(t_0)$,
где $\|\cdot\|$ - евклидова норма, $x(t), u(t)$ – векторы состояния и управления, x_{ref}, u_{ref} – состояние и целевое управление квадрокоптера на желаемой траектории, f – нелинейная вектор-функция, описывающая правые части дифференциальных уравнений, U – множество допустимых управлений. Оптимизационная задача (22) решается на каждом временном шаге в соответствии с методологией прогнозирующего управления. Проведенные расчеты показали достаточно хорошую робастность и эффективность предложенных алгоритмов.

УДК 681.5

СИНТЕЗ ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕТОМ КВАДРОКОПТЕРА

А.И. ХАФИЗОВ
Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева–КАИ
Казань, Россия

В данном исследовании освещается проблема эффективного управления квадрокоптером при наличии возмущений и неопределенностей. Для ее решения предлагается использовать прогностическую