УДК 519.068

К ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА НА ОСНОВЕ РАСШИРЕННОГО КРИТЕРИЯ НАЙКВИСТА

© 2009 г. В.И. Гаркушенко

Рассматривается задача синтеза регуляторов заданной структуры на основе предложенной расширенной формулировки критерия Найквиста для случая, когда передаточная функция разомкнутой системы зависит от заранее неизвестных параметров. В качестве примера приводится графоаналитический способ определения области допустимых параметров ПИД-регулятора, обеспечивающего заданные запасы устойчивости по фазе и амплитуде замкнутой системы, по известной амплитудно-фазовой частотной характеристике объекта управления.

Ключевые слова: расширенный критерий Найквиста; ПИД-регулятор; область устойчивости параметров.

Одной из актуальных проблем современной теории автоматического управления по-прежнему остается разработка методов построения областей устойчивости по параметрам и синтеза регуляторов наименьшей размерности, стабилизирующих систему с заданными показателями качества, что подтверждается многочисленными публикациями в отечественных и зарубежных изданиях.

Известные методы к решению указанных задач можно разделить на временны́е, алгебраические и частотные. Временны́е методы связаны с использованием функций Ляпунова, алгебраические – с критерием Гурвица, частотные – с различными частотными характеристиками. Частотные методы построения областей устойчивости по параметрам формально сводятся к методу *D*-разбиения, современное развитие которого достаточно полно освещено в работе [1]. С их помощью в отличие от критерия Гурвица удается исследовать устойчивость систем высокого порядка при наличии запаздывания.

Кроме того, при решении прикладных задач не всегда известна математическая модель объекта управления, но может быть экспериментально построена его амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) [2]. В этом случае более эффективным частотным методом анализа устойчивости системы является критерий Найквиста [3], позволяющий определять интервалы устойчивости замкнутой системы по коэффициенту передачи разомкнутой системы. Возможным расширением данного критерия является его формулировка для случая, когда передаточная функция разомкнутой системы зависит от заранее неизвестных параметров, что дает более широкие возможности для анализа устойчивости и синтеза регуляторов.

Расширенная формулировка критерия Найквиста

Для расширения круга задач, решаемых с помощью критерия Найквиста, рассмотрим физически реализуемую систему, у которой передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p,a)=W_1(p)W_2(p,a), \qquad (1)$$

где $W_1(p)$ – известная передаточная функция физически реализуемого объекта управления; $W_2(p,a)$ – передаточная функция, зависящая от вектора параметров a.

Будем считать, что в точке a^* и в ее сколь угодно малой окрестности характеристическое уравнение

$$1+W(p,a)=0 \qquad (2)$$

замкнутой системы имеет $l=m-2N$ правых корней, где $m-$ количество правых полюсов передаточной функции $W\left(p,a^*\right)$; N – число охватов с учетом знака точки $(-1, j0)$ АФЧХ $W\left(j\omega,a^*\right)$. Данное свойство выполняется, например, для минимально-фазовых передаточных функций $W_2(p,a)$, где вектор a состоит из малых постоянных времени $\left(a^*=0\right)$, не влияющих согласно критерию Найквиста на устойчивость замкнутой системы.

Найдем условия устойчивости корней характеристического уравнения (2).

При выполнении равенства $W_1(j\omega)W_2(j\omega,a)=-1$ или существовании решения уравнения

$$W_1(j\omega)=-1/W_2(j\omega,a) \qquad (3)$$

при некоторых значениях a замкнутая система имеет корни характеристического уравнения $p = j\omega$, расположенные на мнимой оси. Заштрихуем мнимую ось $p = j\omega$ плоскости корней и ее отображение АФЧХ $W_1(j\omega)$ на другой комплексной плоскости так, чтобы при возрастании частоты ω от $-\infty$ до ∞ эта штриховка была слева. Учитывая симметричность АФЧХ относительно вещественной оси, будем строить $W_1(j\omega)$ и $-1/W_2(j\omega, a)$ при изменении ω от 0 до ∞. При этом точки p в левой (правой) полуплоскости корней преобразуются в точки, лежащие слева (справа) от АФЧХ $W_1(j\omega)$ [3].

Пусть передаточная функция $W_2(p, a)$ является минимально-фазовой при любых допустимых значениях a. Тогда при изменении a число правых полюсов разомкнутой системы (1) останется равным m.

Построим АФЧХ $-1/W_2(j\omega, a)$ для фиксированного значения a. Если ее график не пересекается с графиком АФЧХ $W_1(j\omega)$ или в точке пересечения не выполняется равенство (3), то замкнутая система по-прежнему имеет l правых корней, поскольку изменение правых корней связано с переходом некоторых корней через мнимую ось при выполнении равенства (3) и изменении числа охватов N.

Если указанные графики имеют общие точки при некоторых значениях частоты и соответствующих параметрах a, то в этом случае некоторые корни выходят на мнимую ось. В общей точке при фиксированной частоте ω^* АФЧХ $W_1(j\omega^*)$ и изменении параметров вектора a корни на мнимой оси либо остаются на ней, либо смещаются в левую или правую полуплоскость. Если осуществляется пересечение с незаштрихованной (с заштрихованной) стороны, то число правых корней замкнутой системы уменьшается (увеличивается): на один в точках пересечения $W_1(j0)$ и $W_1(j\infty)$; на два в точке пересечения $W_1(j\omega^*)$ при $\omega^* > 0$. При этом участкам АФЧХ $-1/W_2(j\omega^*, a)$, для которых суммарное уменьшение правых корней равно l, соответствуют значения параметров вектора a, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы.

С учетом сказанного приходим к расширенной формулировке критерия устойчивости Найквиста: для устойчивости замкнутой системы с передаточной функцией разомкнутой системы (1), где $W_2(p, a)$ – минимально-фазовая передаточная функция, такая, что в точке a^* и в ее сколь угодно малой окрестности число правых корней l характеристического уравнения (2) равно числу правых корней уравнения $1 + W(p, a^*) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы в общих точках графиков $W_1(j\omega)$ и $-1/W_2(j\omega, a)$ при соответствующей фиксированной частоте ω^* существовали участки АФЧХ $-1/W_2(j\omega^*, a)$ со стороны внешней штриховки АФЧХ $W_1(j\omega)$, при переходе на которые посредствам изменения параметров вектора a суммарное уменьшение правых корней равнялось l.

Если указанные общие точки отсутствуют, то замкнутая система устойчива только при $l = 0$.

Если передаточная функция $W_2(p, a)$ не является минимально-фазовой и число правых корней характеристического уравнения (2) в точке a^* отличается от числа правых корней ее и в сколь угодно малой окрестности или оно заранее неизвестно, то аналогичным участкам АФЧХ $-1/W_2(j\omega^*, a)$ со стороны внешней штриховки АФЧХ $W_1(j\omega)$ соответствуют области параметров a с наименьшим числом правых корней. В этом случае для проверки устойчивости замкнутой системы необходимо проверить ее устойчивость для фиксированного a из найденной области с помощью любого метода.

Пример 1. Найдем условие устойчивости замкнутой системы при $W_1(p) = 1/p^3$, $W_2(p) = a_1 p^2 + a_2 p + a_3$, где вектор a состоит из коэффициентов $a_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0$, $a_3 > 0$ со значениями $a_1^* = 0$, $a_2^* = 0$, $a_3^* = 1$.

Выделим вещественную и мнимую часть выражения

$$-1/W_2(j\omega, a) = \frac{-j\omega}{\left(a_3 - a_1\omega^2\right) + ja_2\omega} = U(\omega, a) + jV(\omega, a), \quad (4)$$

где

$$U(\omega, a) = \frac{-a_2\omega^2}{\left(a_3 - a_1\omega^2\right)^2 + a_2^2\omega^2};$$
$$V(\omega, a) = \frac{-\omega\left(a_3 - a_1\omega^2\right)}{\left(a_3 - a_1\omega^2\right)^2 + a_2^2\omega^2}. \quad (5)$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что функции $U(\omega, a)$ и $V(\omega, a)$ удовлетворяют уравнению

$$\left(U(\omega, a) + C(a)\right)^2 + V^2(\omega, a) = R^2(a) \quad (6)$$

со значениями $C(a) = 0{,}5/a_2$, $R(a) = 0{,}5/a_2$.

Тем самым график правой части уравнения (3) на комплексной плоскости представляет смещенную окружность по вещественной оси, а график левой части, полученный из функции $1/(j\omega+\varepsilon)^2$ при положительном $\varepsilon \to 0$, совпадает с вещественной отрицательной полуосью (рис. 1). Этим объясняется расположение штриховки на вещественной отрицательной полуоси.

Указанные графики пересекаются в точке A, в которой выполняется равенство $-1/\omega^2 = -1/a_2$ при $\omega^* = \sqrt{a_2}$, $a_3 = a_1 \omega^{*2}$. Здесь условие расположения участка АФЧХ $-1/W_2(j\omega^*, a)$ со стороны внешней штриховки АФЧХ $W_1(j\omega)$ можно записать в виде: $V(\omega^*, a)/U(\omega^*, a) < 0$. Отсюда следует неравенство $a_3 < a_1 \omega^{*2}$ или $a_3 < a_1 a_2$.

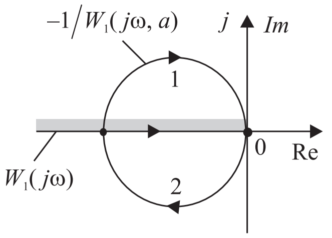

Рис. 1

С помощью критерия Найквиста нетрудно показать, что в точке a^* и в ее сколь угодно малой окрестности, где $a_3 > a_1 a_2$, замкнутая система имеет $l = 2$ правых корней. Тем самым при переходе с участка 2 на участок 1 АФЧХ $-1/W_2(j\omega^*, a)$ замкнутая система является устойчивой при выполнении неравенства $a_3 < a_1 a_2$, что совпадает с условием устойчивости по критерию Гурвица.

Выбор параметров ПИД-регулятора для системы с известной АФЧХ объекта управления

Рассмотрим задачу выбора параметров ПИД-регулятора замкнутой системы с известной АФЧХ объекта управления с помощью расширенной формулировки критерия Найквиста.

Передаточная функция ПИД-регулятора в операторной форме имеет вид:

$$W_2(p, a) = k_1 + k_2 p + k_3 / p,$$

где элементами вектора a являются коэффициенты $k_1 > 0$; $k_2 \geq 0$; $k_3 \geq 0$, соответствующие коэффициентам усиления пропорциональной, дифференциальной и интегральной составляющих закона управления по рассогласованию. Звено с передаточной функцией $k_2 p$ физически нереализуемое, поэтому на практике используется приближенная передаточная функция $k_2 p/(Tp+1)$, где T – малая постоянная времени. При этом точке a^* соответствуют значения $k_1 = 1$; $k_2 = 0$; $k_3 = 0$.

Тогда передаточную функцию разомкнутой системы (1) можно представить в виде

$$W(p, a) = W_1(p) \frac{(k_2 p^2 + k_1 p + k_3)}{p}. \qquad (7)$$

Будем полагать, что в точке a^* замкнутая система с передаточной функцией $W(p, a^*) = W_1(p)$ имеет l правых корней и соответствующий ей фрагмент АФЧХ имеет, например, вид, изображенный на рис. 2.

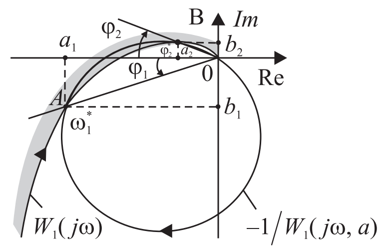

Рис. 2

Найдем условие на выбор параметров $k_1 > 0$, $k_2 \geq 0$, $k_3 \geq 0$, при которых замкнутая система с передаточной функцией (7) разомкнутой системы имеет заданный запас устойчивости по фазе φ_3. В этом случае на частоте среза $\omega_{\text{ср}}$ должно выполняться равенство

$$W(j\omega_{\text{ср}}, a) = e^{-j(\pi - \varphi_3)}. \qquad (8)$$

Для определения условий, при которых выполняется равенство (8), с учетом $e^{-j(\pi-\varphi_3)} = -e^{j\varphi_3}$ запишем уравнение

$$W_1(j\omega) = -1/\tilde{W}_2(j\omega, a), \qquad (9)$$

где $\tilde{W}_2(j\omega, a) = \frac{(k_3 - k_2\omega^2) + k_1 j\omega}{j\omega} e^{-j\varphi_3}$.

Тем самым выполнение условия (8) сводится к проверке устойчивости по расширенной формулировке критерия Найквиста с использованием уравнения (9).

С учетом выражений (4) – (6) при $a_1 = k_2$; $a_2 = k_1$; $a_3 = k_3$ нетрудно проверить, что график правой части уравнения (9) на комплексной плоскости представляет смещенную окружность, повернутую против часовой стрелки на угол φ_3 (см. рис. 2).

Значение частот среза $\omega_{ср}$, при которых выполняется равенство (8), определяется в точках пересечения АФЧХ левой и правой части равенства (9).

Например, на рис. 2 имеются две точки пересечения при двух значениях ω_1^* и $\omega_2^* > \omega_1^*$. При этом дуге окружности AB, лежащей со стороны штриховки АФЧХ $W_1(j\omega)$, соответствуют параметры $k_i, i=\overline{1,3}$, обеспечивающие запас по фазе не меньше φ_3, если дуге окружности AOB соответствуют параметры, при которых $l=2$.

Тем самым заданный запас по фазе φ_3 может быть обеспечен для значений частоты среза $\omega_1^* \le \omega_{ср} \le \omega_2^*$. Для увеличения частоты среза (уменьшения времени регулирования) можно увеличить значение коэффициента k_1, что приведет к уменьшению радиуса повернутой окружности. Если указанная окружность окажется полностью с незаштрихованной стороны, то желаемый запас по фазе φ_3 не достигается.

При фиксированном коэффициенте k_1 найдем условия на выбор коэффициентов k_2, k_3, полагая в точках пересечения $W_1\left(j\omega_i^*\right)=a_i+jb_i$, $i=1,2$, где значения a_i, b_i определяются из графика рис. 2. С учетом выражений (4), (5) при $a_1=k_2$; $a_2=k_1$; $a_3=k_3$, а также $e^{j\varphi_3}=\cos\varphi_3+j\sin\varphi_3$ из уравнения (9) получим равенство

$$a_i+jb_i=\left(U\left(\omega_i^*\right)\cos\varphi_3-V\left(\omega_i^*\right)\sin\varphi_3\right)+$$
$$+j\left(U\left(\omega_i^*\right)\sin\varphi_3+V\left(\omega_i^*\right)\cos\varphi_3\right).$$

Для того чтобы параметры k_2, k_3 соответствовали дуге окружности AB, со стороны штриховки АФЧХ $W_1(j\omega)$ должны выполняться неравенства

$$\mathrm{tg}\varphi_1=\frac{b_1}{a_1}>\frac{U\left(\omega_1^*\right)\sin\varphi_3+V\left(\omega_1^*\right)\cos\varphi_3}{U\left(\omega_1^*\right)\cos\varphi_3-V\left(\omega_1^*\right)\sin\varphi_3};$$

$$\mathrm{tg}\varphi_2=\frac{b_2}{a_2}<\frac{U\left(\omega_2^*\right)\sin\varphi_3+V\left(\omega_2^*\right)\cos\varphi_3}{U\left(\omega_2^*\right)\cos\varphi_3-V\left(\omega_2^*\right)\sin\varphi_3},$$

из которых следуют условия:

$$k_2\ge 0,\ k_3\ge 0; \qquad (10)$$

$$k_3<k_2\omega_1^{*2}+\frac{b_1\cos\varphi_3-a_1\sin\varphi_3}{b_1\sin\varphi_3+a_1\cos\varphi_3}k_1\omega_1^*; \qquad (11)$$

$$k_3>k_2\omega_2^{*2}+\frac{b_2\cos\varphi_3-a_2\sin\varphi_3}{b_2\sin\varphi_3+a_2\cos\varphi_3}k_1\omega_2^*. \qquad (12)$$

Условия (10) – (12) также справедливы в случае, когда АФЧХ $W_1(j\omega)$ в области высоких частот имеет точки пересечения с дугой AOB, поскольку дуга окружности AB является самой внешней по отношению к штриховке АФЧХ $W_1(j\omega)$.

Таким образом, если при фиксированном значении параметров из области (10) – (12) в замкнутой системе достигается заданный запас по фазе не меньше φ_3, то это будет справедливо для каждой точки выпуклой области (10) – (12).

Аналогично можно найти условия на выбор параметров $k_i, i=\overline{1,3}$, при которых замкнутая система имеет заданный запас устойчивости по модулю. В этом случае на частоте ω_π пересечения АФЧХ $W(j\omega,a)$ с вещественной осью должно выполняться равенство $W(j\omega_\pi,a)=-A_3$, где $0<A_3<1$. При этом в уравнении (9) $\tilde{W}_2(j\omega,a)=\dfrac{\left(\tilde{k}_3-\tilde{k}_2\omega^2\right)+\tilde{k}_1 j\omega}{j\omega}$,

где $\tilde{k}_i=k_i/A_3$, $i=\overline{1,3}$, а параметры ограничены с помощью неравенств

$$k_2\ge 0,\ k_3\ge 0; \qquad (13)$$

$$k_3<k_2\omega_1^{*2}+b_1k_1\,\omega_1^*/a_1; \qquad (14)$$

$$k_3>k_2\omega_2^{*2}+b_2k_1\,\omega_2^*/a_2. \qquad (15)$$

При совместном выполнении условий (10) – (12) и (14), (15) определяется область значений коэффициентов k_i, $i=\overline{1,3}$, при которых обеспечиваются запасы устойчивости по фазе не меньше и по амплитуде не больше заданных.

Пример 2. Для разомкнутой системы (7) с передаточной функцией $W_1(p)=1/(p+1)^4$ при $k_1=1$ найдем параметры k_2, k_3, при которых в замкнутой системе обеспечиваются запасы по фазе не меньше $\varphi_3=60$ град и амплитуде не больше $A_3=0{,}1778$.

Фрагмент графиков АФЧХ $W_1(j\omega)$ и АФЧХ $-1/\tilde{W}_2(j\omega,a)$, построенных с помощью вычислительного пакета Mathlab, имеют вид, представленный на рис. 2, из которого для неравенств (11), (12) найдены значения: $\omega_1^*=0{,}37$; $a_1=0{,}123$; $b_1=-0{,}765$; $\omega_2^*=1{,}2$, $a_2=-0{,}159$; $b_2=0{,}0587$. По данным значениям на рис. 3 построена область (10) – (12), ограниченная прямыми 1 и 2.

Соответственно для неравенств (14), (15) получены значения: $\omega_1^*=1{,}24$, $a_1=-0{,}154$, $b_1=0{,}0604$; $\omega_2^*=2{,}22$, $a_2=-0{,}0059$, $b_2=0{,}0318$. По данным значениям на рис. 3 построена область (13) – (15), ограниченная прямыми 3 и 4.

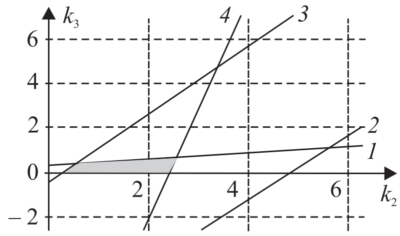

Рис. 3

Пересечение указанных областей на рис. 3 закрашено. При этом для точки $k_2=2$, $k_3=0{,}5$ из данной области на рис. 4 приведена АФЧХ $W(j\omega)$, у которой запас по фазе $\varphi_3=66{,}7$ град, запас по амплитуде $A_3=0{,}1496$. Тем самым для любой точки закрашенной области запасы по фазе не меньше φ_3 и по амплитуде не больше A_3.

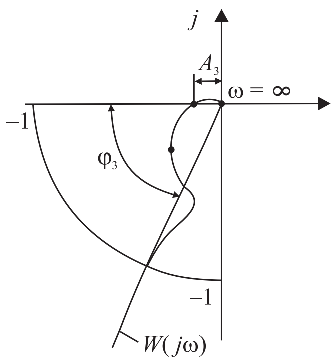

Рис. 4

Полагая $\varphi_3=0$, из неравенств (10) – (12) можно определить область устойчивости по коэффициентам k_2, k_3, которую также можно найти с помощью критерия Льенара – Шипара [4]. Однако здесь при использовании данного критерия для передаточной функции $W_1(p)$, у которой порядок полинома знаменателя $n\geq 4$, приходится решать нелинейные неравенства.

Отметим, что большинство технических систем являются устойчивыми в разомкнутом состоянии $(m=0)$ или при их замыкании отрицательной обратной связью ($l=0$). В этом случае для синтеза ПИД-регулятора не требуется знание математической модели разомкнутой системы, а достаточно знание ее АФЧХ $W_1(j\omega)$ в области средних частот, которая может быть построена экспериментально по известной переходной характеристике устойчивой разомкнутой или замкнутой системы [2]. Если при малых значениях параметров k_2, k_3 замкнутая система с ПИД-регулятором остается устойчивой, то для настройки его параметров можно использовать полученные условия (10) – (12), (14), (15).

Таким образом, с помощью предложенной расширенной формулировки критерия Найквиста установлено, что области устойчивости, допустимых запасов устойчивости по фазе и амплитуде по неотрицательным параметрам k_2, k_3 ПИД-регулятора являются выпуклыми и определяются линейными неравенствами независимо от порядка системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода D-разбиения. //Автоматика и телемеханика. 2008. № 12. С. 3-40.
2. *Вавилов А.А., Солодовников А.И.* Экспериментальное определение частотных характеристик автоматических систем. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. 252 с.
3. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977. 560 с.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: 1988. 548с.

Поступила в редколлегию 09.10.09

GENERALIZATION OF NYQUIST STABILITY CRITERION AT SOLVING THE PROBLEMS OF PARAMETRIC SYNTHESIS

V.I. Garkushenko

Based on the herein-proposed formulation of Nyquist criterion for the case when the transfer function of the open-loop system depends on a priori unknown parameters, we consider here the problem on synthesizing the controllers with preset structure. As an example, we present the grapho-analytical method for determining the region of parameters to be admissible for the PID-controller that provides the preset margins of stability in the system's phase and amplitude using as the base the well-known amplitude-phase frequency characteristic of control object.

Key words and expressions: extended Nyquist criterion; PID-controller; parameter stability region.

Гаркушенко Владимир Иванович – канд. техн. наук, доцент кафедры «Автоматика и управление» КГТУ им. А.Н. Туполева, wig@front.ru