Номинация 3. Исследование и моделирование систем автоматического управления

Задача 1

Найти решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} 2x' + x^3 = y \\ 0.5y' + y^3 = 2z \\ z' + x + z^3 = \sin(t) \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = -1$ для t в диапазоне от 0 до 6 с. Построить графики функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Решение:

Преобразуем уравнение к системе уравнений в нормальной форме Каши:

$$\begin{cases} x' = 0.5\,y - 0.5\,x^3 \\ y' = 4\,z - 2\,y^3 \\ z' = \sin(t) - x - z^3 \end{cases}$$

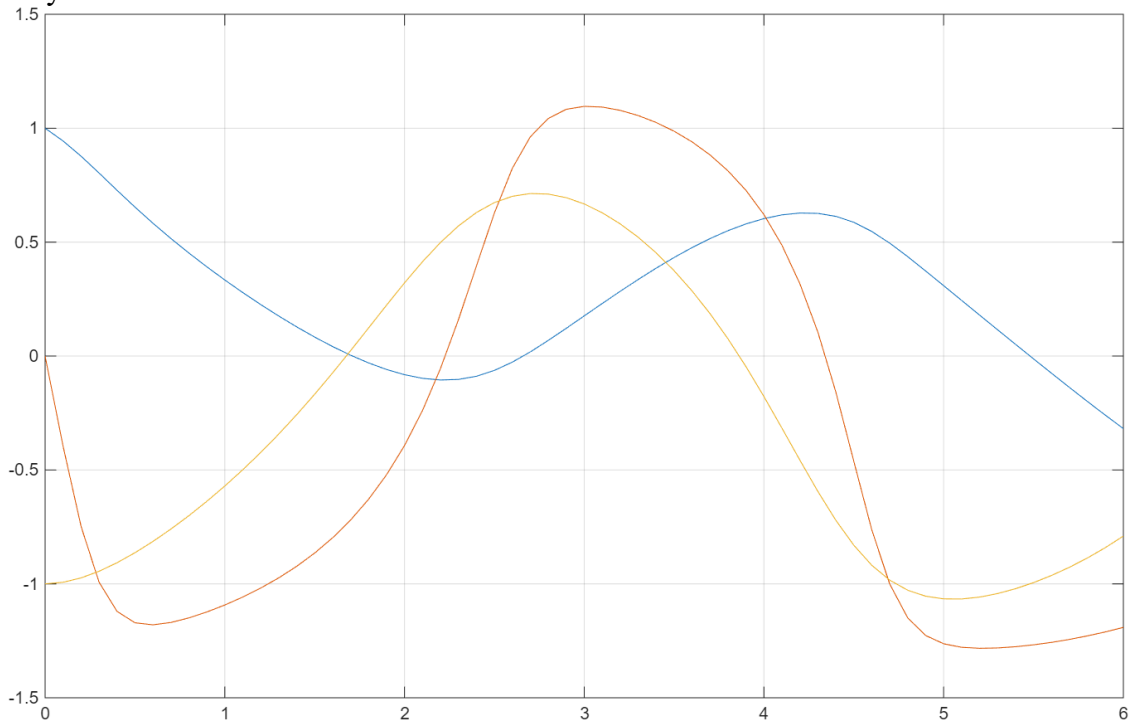
Программа численного решения системы дифференциальных уравнений на языке Matlab:

```
[t,y]=ode45(@f1, 0:0.1:6, [1; 0; -1]);

plot(t,y(:,1), t,y(:,1));
plot(t, y);
grid on

function dy=f1(t, y)
dy(1,1) = 0.5*y(2) - 0.5*y(1)^3;
dy(2,1) = 4*y(3) - 2*y(2)^3;
dy(3,1) = sin(t) - y(1) - y(3)^3;
end
```

Результат



Задача 2

Найти численное решение $y(t)$ дифференциального уравнения

$$2\,y''\cdot y + 3\,y\,y' = 2\,y''' - 5\,y''\sin(t) - 1$$

при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -1$ для t в диапазоне от 0 до 5 с шагом 0.01 с, построить график функции $y(t)$ и $y'(t)$.

Решение:

Преобразуем уравнение к системе уравнений в нормальной форме Каши:

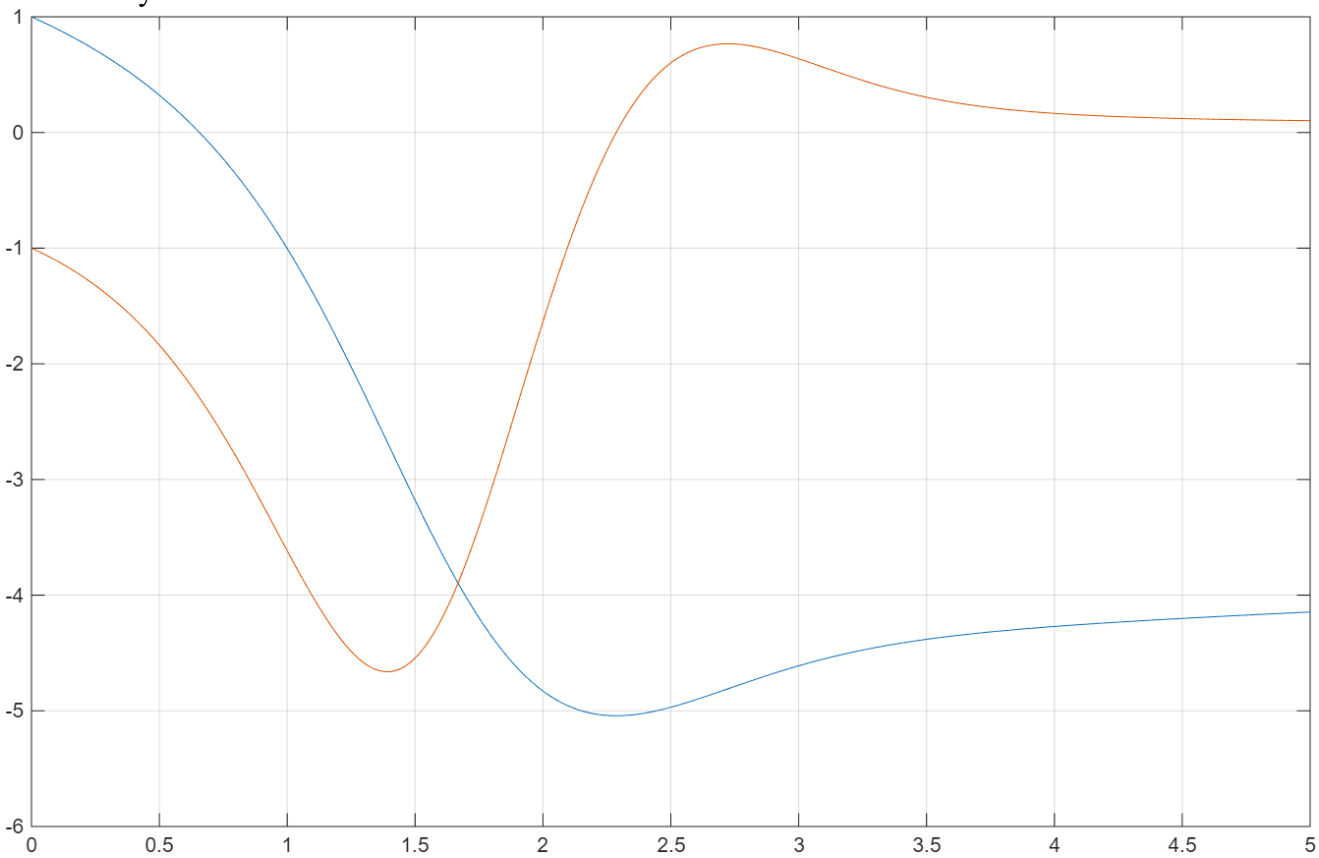
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = 1.5\,y_1 y_2 + y_3\,y_1 + 2.5\,y_3\sin(t) + 0.5 \end{cases}$$

Программа численного решения системы дифференциальных уравнений на языке Matlab:

```
[t,y]=ode45(@f1, 0 :0.01 :5, [1; -1; -1]);
plot(t,y(:,1), t,y(:,2));
grid on

function dy=f1(t, y)
dy(1,1) = y(2);
dy(2,1) = y(3);
dy(3,1) = 1.5*y(1)*y(2) + y(3)*y(1) + 2.5*y(3)*sin(t) + 0.5;
end
```

Результат



Задача 3

Найти решение $y(t)$ дифференциального уравнения

$$5y''' + t\,e^{1-t}\,y' = 2\sin(t^2) + 4y'''\cos(0.8t) - 0.1y$$

при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = -0.5$, $y''(0) = 0$ для t в диапазоне от 0 до 15 с с шагом 0.1 с, построить графики функции $y(t)$ и $y'(t)$ в одних осях координат.

Решение:

Преобразуем уравнение к системе уравнений в нормальной форме Каши:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = (2\sin(t^2) - t\,e^{1-t}\,y_2 - 0.1\,y_1)/(5 - 4\cos(0.8\,t)) \end{cases}$$

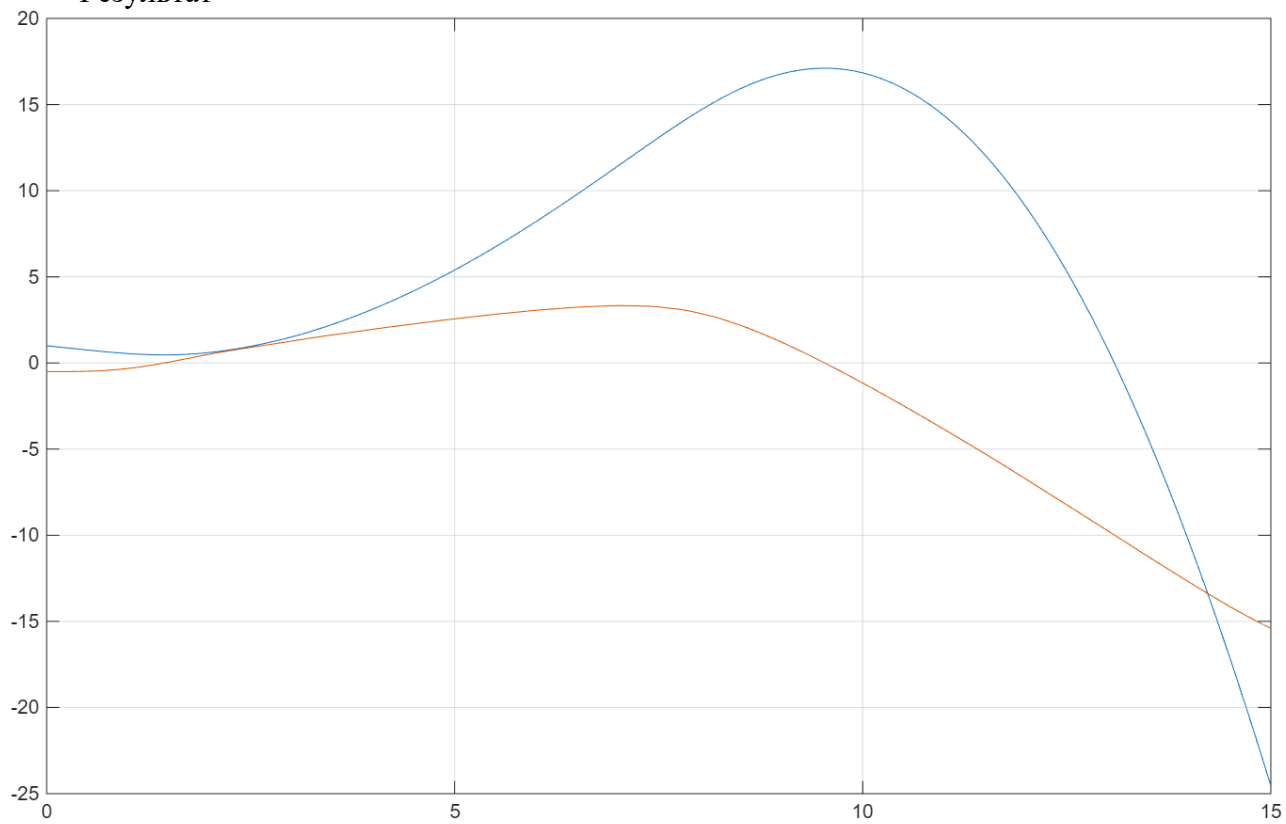
Программа численного решения системы дифференциальных уравнений на языке Matlab:

```
t=[0:0.1:15];
y0=[1;-0.5;0];
[T, Y] = ode45(@fun, t, y0);

plot(T,Y(:,1), T, Y(:,2))
grid on;

function dydt=fun(t,y)
dydt=[ y(2);
       y(3);
        (2*sin(t*t)-t*exp(1-t)*y(2)-0.1*y(1))/(5-4*cos(0.8*t))
      ];
end
```

Результат



Задача 4

Найти решения $x(t)$, $y(t)$ системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} 2x'' + 2x' + x + 3y'' + y' + y = 0 \\ 0.5x'' + 2x' - 0.5x + 1.5y'' + y' - 0.5y = 0 \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0.2$ для t в диапазоне от 0 до 4 с. Построить графики функций $x(t)$, $y(t)$.

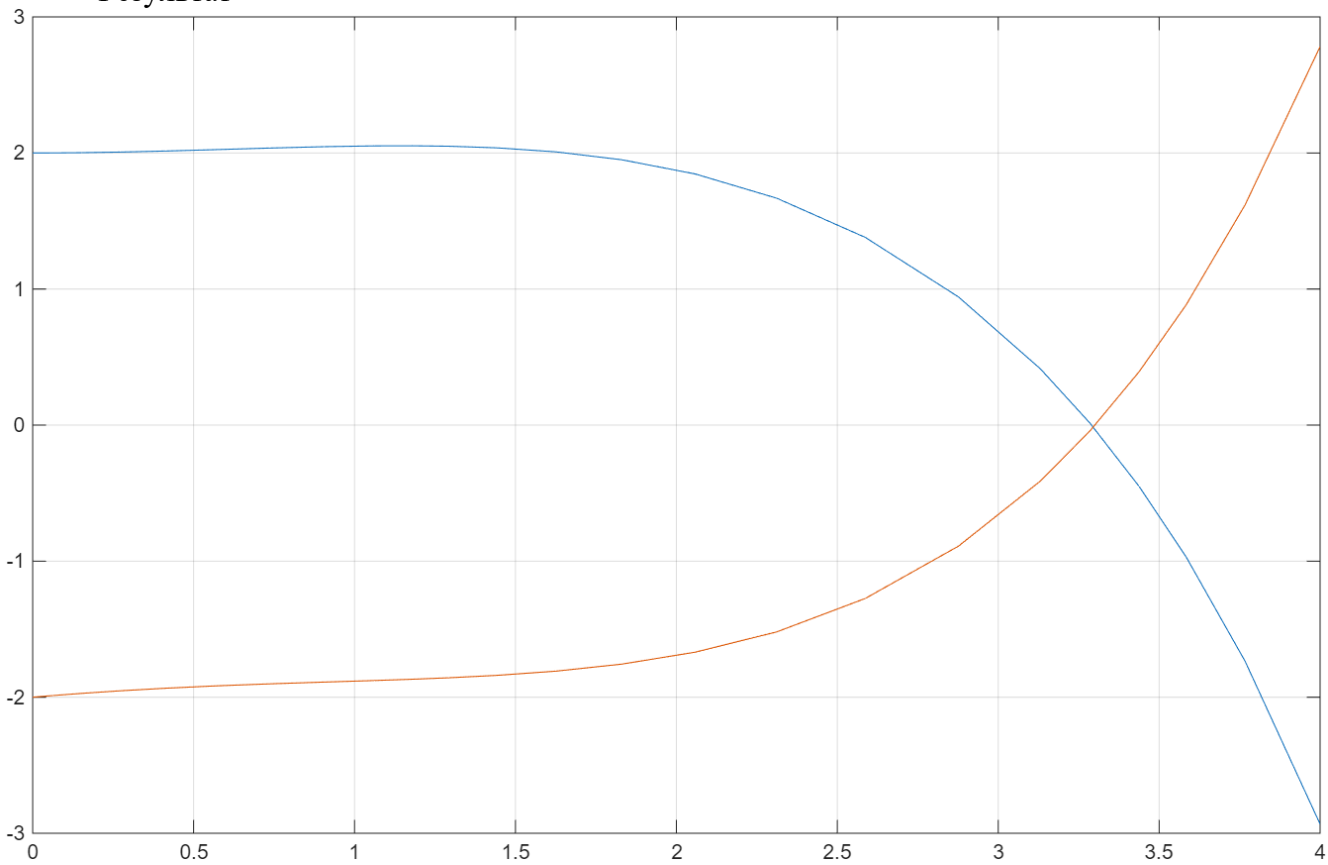
Решение:

После приведения системы уравнений к нормальной форме Каши программа численного решения системы дифференциальных уравнений на языке Matlab имеет вид:

```
[t,y]=ode23(@right2,[0 4],[2;-2;0;0.2]);
plot(t,y(:,1),t,y(:,2));
grid on

function dqdt=right2(t,q)
x1 = q(1);
x2 = q(2);
x3 = q(3);
x4 = q(4);
dx1 = x3;
dx2 = x4;
dx3 = 2*x3-2*x1+x4-2*x2;
dx4 = x2-2*x3+x1-x4;
dqdt = [dx1; dx2; dx3; dx4];
end
```

Результат



Задача 5

Найти решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' + y' + z' + 2z = 0 \\ x' + 3y' + z' + 4y = 2x \\ x' + y' - z' + 2y = 4z \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = 1$, $y(0) = 0.5$, $z(0) = -1$ для t в диапазоне от 0 до 7 с с шагом 0.01 с. Построить графики функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Решение:

Приведём систему уравнений к нормальной форме Каши:

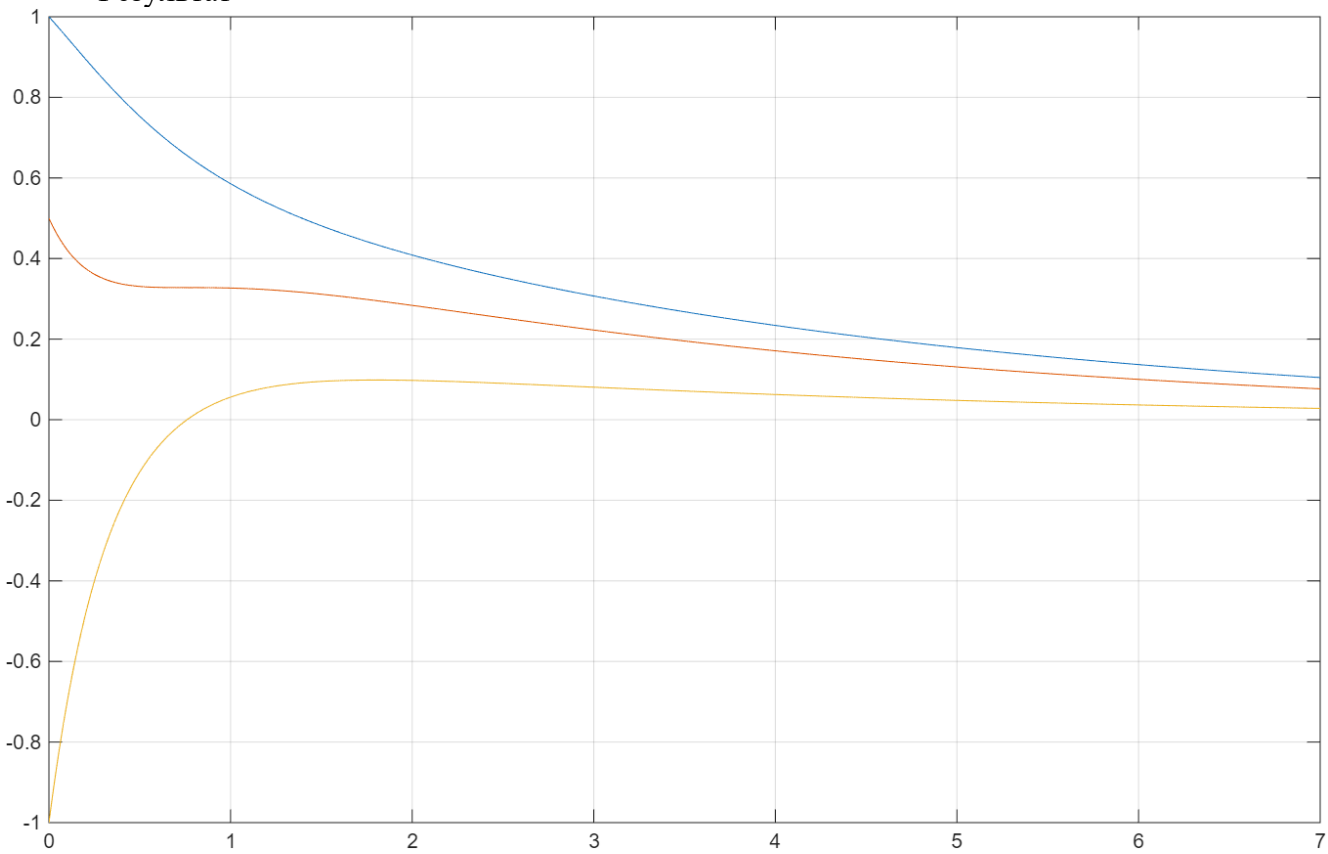
$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x - 2y + z \\ z' = y - 3z \end{cases}$$

Программа численного решения системы дифференциальных уравнений на языке Matlab:

```
[t,y]=ode45(@f3, 0:0.01:7, [1; 0.5; -1]);
plot(t, y);
grid on

function dy=f3(t, y)
 dy(1,1) = -y(1) + y(2);
 dy(2,1) = y(1) - 2*y(2) + y(3);
 dy(3,1) = y(2) - 3*y(3);
end
```

Результат



Задача 7

Рассматривается система автоматического управления крестокрылым летательным аппаратом (летательный аппарат с двумя плоскостями симметрии). Движение рыскания такого летательного аппарата описывается системой дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + n_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} + n_{\dot\beta}\frac{d\beta}{dt} + n_\beta\beta = -n_н\delta_н;$$

$$\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\beta}{dt} = k_\beta\beta.$$

Здесь ψ – угол рыскания; β – угол скольжения, $\delta_н$ – угол отклонения руля направления, динамические коэффициенты летательного аппарата:

Коэффициент	$n_{\dot\psi}$, с$^{-1}$	$n_{\dot\beta}$, с$^{-1}$	n_β, с$^{-2}$	$n_н$, с$^{-2}$	k_β, с$^{-1}$
Значение	2.5	1.5	5.3	5.8	1.6

Закон управления летательным аппаратом по курсу имеет вид:

$$\frac{d\delta_н}{dt} = c_\psi(\psi - \psi_З) + c_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} + c_{\ddot\psi}\frac{d^2\psi}{dt^2},$$

где $\psi_З$ – заданное входное воздействие.

Коэффициенты регулятора:

$$c_\psi = 0.77\ \text{с}^{-1};\quad c_{\dot\psi} = 1.99;\quad c_{\ddot\psi} = 0.5\ \text{с}$$

Необходимо построить графики переходных процессов $\psi(t)$ и $\beta(t)$ при заданном входном воздействии $\psi_З = 5^o$ в течении 60 с с шагом 0.01 с.

Решение:

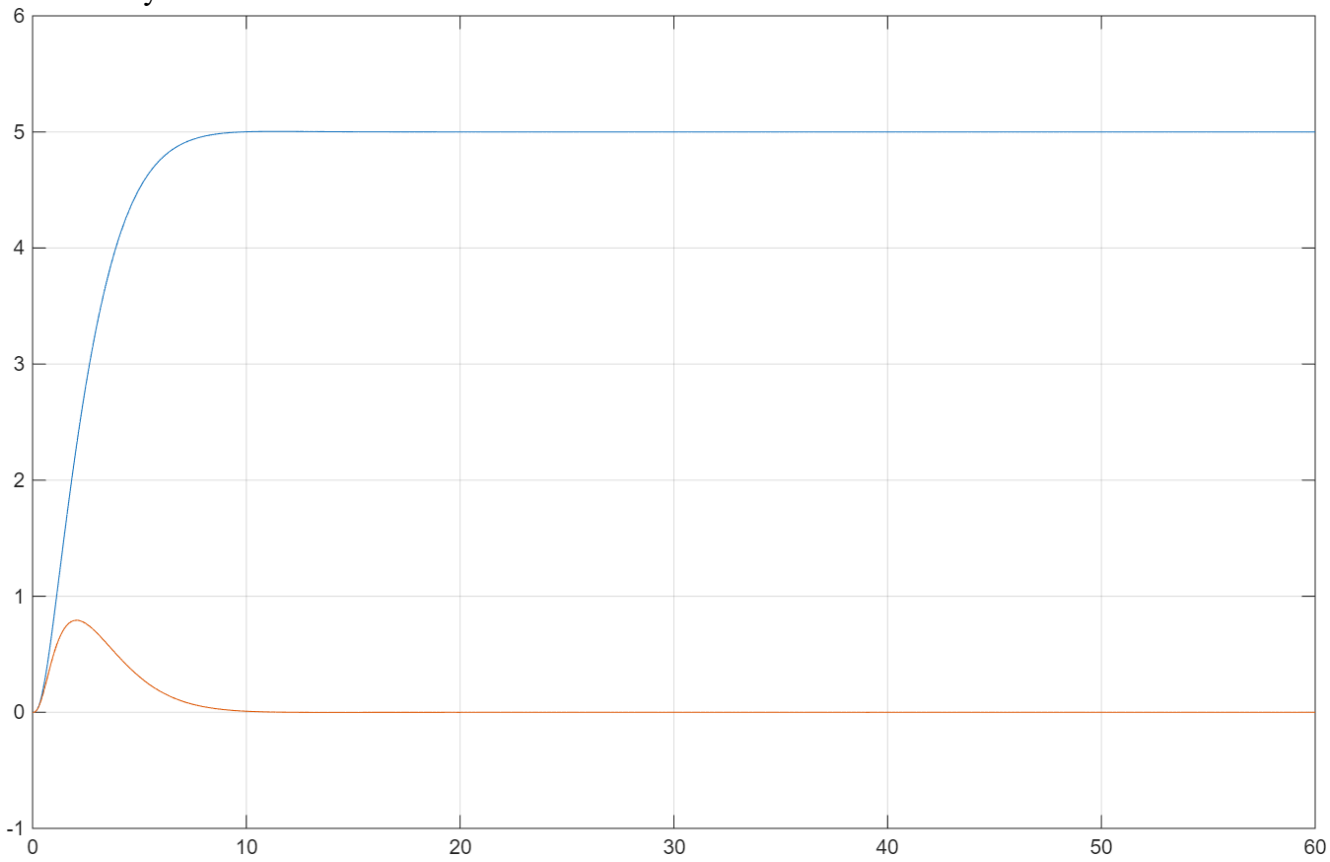
После приведения системы уравнений к нормальной форме Каши программа численного решения системы дифференциальных уравнений на языке Matlab имеет вид:

```
global Ndpsi Nb Ndb Kb Nh Psi0
Ndpsi = 2.5;
Nb = 5.3;
Ndb = 1.5;
Kb = 1.6;
Nh = 5.8;
Psi0 = 5*pi/180;

x0=[0 0 0 0]';

[t,x]=ode45(@f, [0 60], x0);
plot(t, x(:,1)*180/pi, t, x(:,3)*180/pi);
grid on

function dx = f(t, x)
global Ndpsi Nb Ndb Kb Nh Psi0
dx = zeros(4,1);
Cpsi=0.77;   Cdpsi=1.99;   Cddpsi=0.5;
dx(1) = x(2);
dx(2) = (Ndb*Kb-Nb)*x(3) - (Ndb + Ndpsi)*x(2) - Nh*x(4);
dx(3) = x(2) - Kb*x(3);
dx(4) = Cddpsi*dx(2)+Cdpsi*x(2)+Cpsi*(x(1)-Psi0);
```

```
end
```

Результаты