

УДК 532.5.032

О ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ЦИЛИНДРАМИ, ВРАЩАЮЩИМИСЯ И ДВИЖУЩИМИСЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО

© 2016 г. А. О. Казакова*, А. Г. Петров**

*Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары

**Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва

e-mail: kazakova_anastasia@bk.ru, petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 21.06.2015 г.

Рассматривается течение вязкой жидкости в области между круговыми цилиндрами. Течение жидкости создается вращательным и поступательным движениями цилиндров. С использованием метода конформного отображения и применением биполярных координат построено общее аналитическое выражение для поля скорости жидкости. Изучена структура линий тока для стационарных течений.

Ключевые слова: вязкая жидкость, кольцевая область, конформное отображение, биполярные координаты, функция тока, поле скоростей жидкости

DOI: 10.7868/S0568528116030087

Задача о течении вязкой жидкости между двумя вращающимися круговыми цилиндрами имеет важные приложения. Сюда относится описание движения жидких смазочных масел в зазоре между вращающимся валом и подушкой подшипника. Эта проблема широко освещена в учебной [1–3] и специальной литературе [4]. Другое направление связано с вопросами теории гидродинамической устойчивости, начало которой положено исследованиями Дж. Тейлора [1, 5, 6]. Эта задача также интересна для решения проблемы перемешивания. Перемешивание вязких сред в тонком деформирующем слое подробно изучено в [7], однако для общего случая требуется построение решения.

Простейшее решение получается в случае осесимметричного вращения цилиндров с постоянными угловыми скоростями. Для вязкой жидкости решение изучено Н.П. Петровым в 1883 г. [8] с приложением к теории трения в подшипниках. Исследование Н.П. Петрова было опубликовано на три года раньше работы О. Рейнольдса [9], на которую обычно ссылаются как на пионерскую работу по теории гидродинамической смазки.

Впервые задачу течения вязкой жидкости между двумя эксцентрично расположенными круговыми цилиндрами, вращающимися около своих неподвижных осей, рассмотрел Н.Е. Жуковский ([10], с. 121–132; опубликовано в Сообщениях математического общества при Харьковском университете, 1887). При малых числах Рейнольдса им получено бигармоническое уравнение и найдено его точное решение. А. Зоммерфельд (1904) дал упрощенное решение задачи течения вязкой жидкости в приближении тонкого слоя между двумя цилиндрами. Ввиду своей простоты приближение, найденное Зоммерфельдом, часто используется в гидродинамической теории смазки. Его решение приведено во многих монографиях (см., например, [1]).

Почти сразу после выхода публикации Зоммерфельда в статье 1906 г. Н.Е. Жуковский и С.А. Чаплыгин провели сопоставление приближенного решения Зоммерфельда со своим точным решением, записанным в биполярных координатах ([11], с. 133–151). Значительно позднее Б. Баллал и Р. Ривлин [12] получили обобщение решения Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина, учитывающее вращение не только внутреннего цилиндра (шипа), но и внешнего (подшипника). На эту работу обычно ссылаются в зарубежной литературе без упоминания пионерских работ Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина.

Все перечисленные выше работы не позволяют получить поле скорости между цилиндрами, когда центры цилиндров движутся относительно друг друга. В работе [13] изложен метод конформного отображения построения поля скорости, пригодный для этого случая.

В работах [14, 15] описан алгоритм решения задачи о движении цилиндра произвольного контура внутри неподвижного цилиндра с использованием конформного отображения и прибли-

женного метода коллокации. В момент времени, когда оси цилиндров совпадают и внутренний цилиндр движется поступательно, выписано частное точное решение. В случае круговых эксцентрических цилиндров (внутренний вращается с некоторой угловой скоростью) произведено сравнение точного решения Жуковского – Чаплыгина с приближенным решением методом коллокации. Кроме того, описано применение численного метода граничных элементов для указанной задачи и приведены результаты численного расчета для некоторых частных случаев.

Настоящая работа посвящена построению точного аналитического решения для поля скоростей жидкости в случае произвольного движения круговых эксцентрических цилиндров (вращательного вокруг оси, проходящей через центр сечения цилиндра, и поступательного вместе с этой осью). Предполагается малость числа Рейнольдса по сравнению с единицей, и уравнения движения жидкости решаются в линейном приближении Стокса, так же, как и во всех цитируемых работах. Для построения решения применяются как метод конформных отображений, так и метод биполярных координат. Причем благодаря достигнутым упрощениям полное аналитическое решение приведено в явном виде. Проведены исследование полученного решения и анализ картины линий тока и неподвижных точек.

1. Поступательное движение цилиндра внутри неподвижного цилиндра. Внутри кругового цилиндра (подшипника) радиуса ρ_1 с неподвижной осью помещен круговой цилиндр (шип) заданного радиуса ρ_0 . Оси цилиндров параллельны, пространство между цилиндрами заполнено однородной несжимаемой жидкостью с большой вязкостью. Пусть течение жидкости не зависит от координаты вдоль оси. В перпендикулярном к оси подшипника сечении строится двумерная декартова система координат $z = x + iy$ с началом на этой оси. Ось шипа проектируется в точку $z_0 = -\Delta x$, зависящую от времени t , но всегда остается параллельной оси подшипника. Область течения на комплексной плоскости z заключена между внутренним кругом радиуса ρ_0 с центром $z_0 = -\Delta x$ и окружностью радиуса ρ_1 . Область течения отображается с помощью аналитической функции $z(q)$ на кольцо комплексной плоскости $r_0 \leq |q| \leq r_1$. Аналитические функции прямого и обратного отображений имеют вид

$$z = \frac{a(1+q)}{1-q} - x_0, \quad x_0 = a \frac{1+r_1^2}{1-r_1^2}, \quad q = \frac{z+x_0-a}{z+x_0+a} \quad (1.1)$$

Расстояние между центрами окружностей Δx и их радиусы ρ_0 выражаются через параметры a , r_0 , r_1 равенствами

$$\Delta x = a \left(\frac{1+r_1^2}{1-r_1^2} - \frac{1+r_0^2}{1-r_0^2} \right), \quad \rho_1 = \frac{2ar_1}{1-r_1^2}, \quad \rho_0 = \frac{2ar_0}{1-r_0^2}$$

Их можно разрешить и выразить параметры a , r_0 , r_1 через данные задачи ρ_0 , ρ_1 , Δx :

$$a = \frac{\sqrt{(\Delta x^2 - \rho_1^2 - \rho_0^2)^2 - 4\rho_1^2\rho_0^2}}{2\Delta x}, \quad r_1 = \frac{\sqrt{a^2 + \rho_1^2} - a}{\rho_1}, \quad r_0 = \frac{\sqrt{a^2 + \rho_0^2} - a}{\rho_0} \quad (1.2)$$

Течение несжимаемой жидкости в области между цилиндрами описывается уравнениями Стокса и уравнением неразрывности

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

где p – давление жидкости, μ – коэффициент ее вязкости.

Из этих уравнений следует

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \mu \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

Последнее равенство показывает, что давление можно представить в виде $p = 4\mu \operatorname{Re} P(z)$, где $P(z)$ – некоторая аналитическая функция.

Далее необходимо ввести комплексные переменные $z = x + iy$, $z^* = x - iy$ и комплексную скорость $w^* = u - iv$ ($w = u + iv$), вторая частная производная которой

$$4 \frac{\partial^2 w^*}{\partial z \partial z^*} = \Delta u - i \Delta v = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - i \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) 2\mu (P(z) + P^*(z^*)) = 4 \frac{dP}{dz}$$

Отсюда непосредственным интегрированием может быть получен вид функции w^*

$$w^* = z^* P(z) + Q^*(z^*) + G(z) \quad (1.3)$$

Из уравнения неразрывности следует, что функция $Q(z)$ выражается через функцию $P(z)$

$$Q(z) = -\int P(z) dz \quad (1.4)$$

Решение задачи содержит аналитическую функцию $P(z)$, представимую в кольце в плоскости q в виде ряда Лорана. Аналитические функции $Q(z)$ и $G(z)$ таким свойством не обладают. Интегрирование по (1.4) приводит к появлению у функции $Q(z)$ логарифмического члена $\ln q$. У функции $G(z)$ следует также учитывать логарифмические члены вида $\ln q$ и $q \ln q$. Это осложняет построение решения. Однако в работе [13] показано, что ряд для функции $P(z)$ оказывается конечным. Поэтому $Q(z)$ и $G(z)$ тоже представляются конечным числом слагаемых. Коэффициенты же у всех этих функций имеют весьма громоздкий вид и выписаны в [13] только для поступательного движения внутреннего цилиндра по направлению к центру неподвижного внешнего цилиндра. Ниже приведены аналитические выражения для полей скорости жидкости в случаях поступательного движения внутреннего цилиндра в более простом по сравнению с [13] виде.

Решение для скорости приведем в переменных $r = |q|$, $\sigma = q/r$.

1. *Внутренний цилиндр движется поступательно вдоль оси Ox со скоростью u_0 :*

$$w = u_0 w_1, \quad w_1 = \frac{1}{2K_u} \left(-\frac{u_1}{r^4(-1+\sigma r)} + \left(\frac{\sigma}{r^3} - \frac{1}{\sigma r} \right) u_3 + \frac{u_6}{r^4} \right)$$

$$K_u = -r_0^2 + r_1^2 + (r_0^2 + r_1^2) \ln \frac{r_0}{r_1}, \quad u_1 = (-1+r^2)^2(r^2-r_0^2)(r^2-r_1^2) \quad (1.5)$$

$$u_3 = -(r^2-r_0^2)(r^2-r_1^2), \quad u_6 = -\left[(r^2-r_0^2+2r^2r_0^2)(r^2-r_1^2) - 2r^4(r_0^2+r_1^2) \ln \frac{r}{r_1} \right]$$

2. *Внутренний цилиндр движется поступательно вдоль оси Oy со скоростью v_0 :*

$$w = i v_0 w_2, \quad w_2 = \frac{1}{2K_v} \left(\frac{v_1}{r^4(-1+\sigma r)} + \left(\frac{\sigma}{r^3} + \frac{1}{\sigma r} \right) v_3 + \frac{v_6}{r^4} \right)$$

$$K_v = -(-1+r_0^2)(r_0^2-r_1^2)(-1+r_1^2) + ((-1+r_0^2)^2 r_1^2 + r_0^2(-1+r_1^2)^2) \ln \frac{r_0}{r_1}$$

$$v_1 = (r^2-r_0^2)(r^2-r_1^2)(1-r_0^2 r_1^2 + 2r^2(-1+r_0^2)(-1+r_1^2) + r^4(-1+r_0^2 r_1^2)) \quad (1.6)$$

$$v_3 = (-r^2+r_0^2)(-1+r_0^2 r_1^2)(r^2-r_1^2)$$

$$v_6 = -(r^2-r_1^2)[r_0^2-r_0^4 r_1^2 + r^2(-1-r_0^2(-2+r_1^2) + 2r_0^4(-1+r_1^2))] - \\ - 2r^4(r_1^2+r_0^4 r_1^2 + r_0^2(1-4r_1^2+r_1^4)) \ln \frac{r_1}{r}$$

В случае произвольного поступательного движения внутреннего цилиндра для функции w справедливо выражение $w = u_0 w_1 + i v_0 w_2$. Проверкой можно убедиться, что скорость w на внешнем цилиндре равна нулю, а на внутреннем $u_0 + i v_0$, где действительная ось направлена к центру внешнего цилиндра.

В [15] получено точное решение для поступательного движения внутреннего цилиндра вдоль оси Ox для одного момента времени, когда оси внутреннего и внешнего цилиндров совпадают. В обозначениях настоящей работы соответствующее поле скоростей имеет вид

$$w = \frac{u_0}{2[R^2-1-(R^2+1)\ln R]} \left(\zeta^2 + \frac{R^2}{\bar{\zeta}^2} - 2|\zeta|^2 - (R^2+1) \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} - 2\ln \frac{|\zeta|}{R} \right) + 2R^2 \right)$$

где u_0 – скорость внутреннего цилиндра радиуса ρ_0 при поступательном движении вдоль оси Ox внутри кругового цилиндра радиуса ρ_1 , $R = \rho_1/\rho_0$, $\zeta = z/\rho_0$.

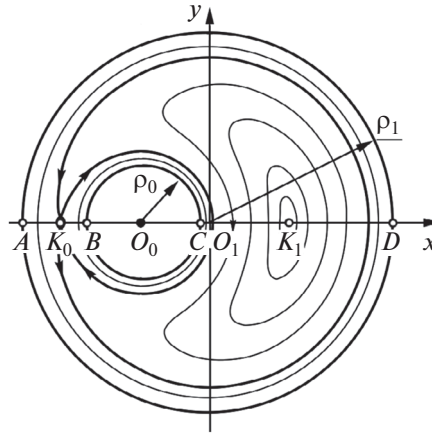


Рис. 1. Схема течения жидкости между двумя вращающимися цилиндрами

Можно показать, что это же выражение получается из общего случая предельным переходом в формуле (1.5) при $\Delta x \rightarrow 0$.

2. Решение задачи о вращении внешнего и внутреннего цилиндров в биполярных координатах. Задача о вращательном движении цилиндров может быть также решена описанным в разделе 1 способом, однако формулы для комплексной скорости в этом случае получаются очень громоздкими. Поэтому обратимся к методу применения биполярных координат, который был использован в работах [11, 12]. В [12] решение указанной задачи подробно изложено, поэтому ограничимся здесь кратким обзором.

Течение жидкости между цилиндрами плоскопараллельное. На фиг. 1 изображено поперечное сечение системы из двух цилиндров, представляющее собой область между двумя окружностями. В ней представлена схема линий тока жидкости, которая создается в результате вращения с разными угловыми скоростями круговых цилиндров. Радиус внешнего круга ρ_1 , внутреннего ρ_0 , расстояние между центрами Δx . Введена декартова система координат, начало которой расположено в центре внешнего круга, ось x проходит через линию центров кругов O_0O_1 . Ось x пересекает внешнюю окружность в точках A и D , внутреннюю окружность в точках B и C , координаты x этих точек имеют значения

$$x_A = -\rho_1, \quad x_B = -\rho_0 - \Delta x, \quad x_C = \rho_0 - \Delta x, \quad x_D = \rho_1, \quad O_0 = -\Delta x, \quad O_1 = 0$$

Для того чтобы центр внешней окружности лежал в начале декартовой системы координат, для решения задачи будем использовать биполярные координаты, несколько отличные от применяемых в [11, 12]. Связь рассматриваемых биполярных координат ξ, η с декартовыми координатами x, y выражается формулами

$$x = a \frac{\text{sh } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \xi} + c, \quad y = a \frac{\sin \xi}{\text{ch } \eta - \cos \xi} \tag{2.1}$$

где $2a$ – расстояние между полюсами F и F' , $c = -a \text{cth } \eta_1$. Линии $\xi = \text{const}$ – окружности, вмещающие хорду FF' , а линии $\eta = \text{const}$ – ортогональные окружности (фиг. 2). Отсюда с помощью (2.1) находим координаты $\xi = \pi$, $x = a \text{sh } \eta / (\text{ch } \eta + 1) + c$ на отрезке AB , и координаты $\xi = 0$, $x = a \text{sh } \eta / (\text{ch } \eta - 1) + c$ на отрезке CD . Для координат точек A и D на внешней окружности $\eta = \eta_1$ радиуса ρ_1 получаем

$$x_A = a \frac{\text{sh } \eta_1}{\text{ch } \eta_1 + 1} + c, \quad x_D = a \frac{\text{sh } \eta_1}{\text{ch } \eta_1 - 1} + c \tag{2.2}$$

Задача сводится к определению бигармонической функции тока Ψ внутри области, ограниченной двумя окружностями: внешней $\eta = \eta_1$ радиуса ρ_1 и внутренней $\eta = \eta_0$ радиуса ρ_0 , расстояние между центрами которых равно Δx . Из (2.1) и (2.2) следуют равенства

$$\rho_1 = \frac{a}{\text{sh } \eta_1}, \quad \rho_0 = \frac{a}{\text{sh } \eta_0}, \quad \Delta x = a \text{cth } \eta_1 - a \text{cth } \eta_0 \tag{2.3}$$

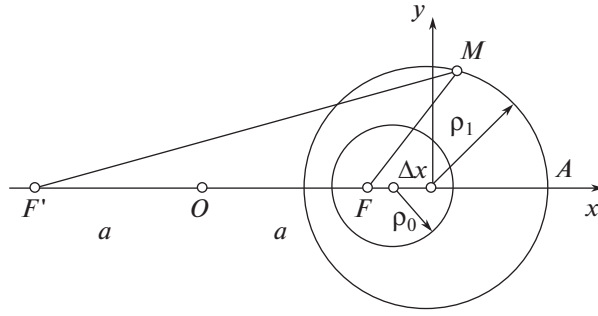


Рис. 2. Биполярные координаты $\xi_M = \angle MFA - \angle MF'A$, $\eta_M = \ln(F'M/FM)$ и линии $\eta = \text{const}$

Разрешая их относительно a , η_1 , η_0 , можно получить следующие выражения для указанных параметров через заданные в задаче ρ_0 , ρ_1 , Δx

$$a = \frac{\sqrt{(\Delta x^2 - \rho_1^2 - \rho_0^2)^2 - 4\rho_1^2\rho_0^2}}{2\Delta x}, \quad \eta_1 = \ln \frac{\sqrt{a^2 + \rho_1^2} + a}{\rho_1}, \quad \eta_0 = \ln \frac{\sqrt{a^2 + \rho_0^2} + a}{\rho_0}$$

В [11] показано, что функция Ψ может быть представлена в виде линейной комбинации функций, удовлетворяющих порознь бигармоническому уравнению

$$\begin{aligned} \Psi = & A\eta + B \frac{\text{sh } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \xi} + K \frac{\text{ch } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \xi} + D \frac{\cos \xi}{\text{ch } \eta - \cos \xi} + \\ & + E \frac{\eta \text{ sh } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \xi} + F \frac{\text{ch } 2\eta \cos \xi}{\text{ch } \eta - \cos \xi} + G \frac{\text{sh } 2\eta \cos \xi}{\text{ch } \eta - \cos \xi} \end{aligned}$$

Очевидны равенства

$$\frac{\cos \xi}{\text{ch } \eta - \cos \xi} = -\frac{\text{ch } \eta - \cos \xi - \text{ch } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \xi} = \frac{\text{ch } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \xi} - 1$$

С их помощью преобразуем Ψ к виду

$$\Psi = N(\eta) + \frac{M(\eta)}{\text{ch } \eta - \cos \xi}, \quad N(\eta) = A\eta - F \text{ch } 2\eta - G \text{sh } 2\eta \quad (2.4)$$

$$M(\eta) = B \text{sh } \eta + C \text{ch } \eta + E\eta \text{sh } \eta + F \text{ch } \eta \text{ch } 2\eta + G \text{ch } \eta \text{sh } 2\eta$$

Граничные условия рассматриваемой задачи: шип и подшипник вращаются с угловыми скоростями ω_0 и ω_1 соответственно; тогда на их поверхностях скорости равны $U_0 = \omega_0 \rho_0$ и $U_1 = \omega_1 \rho_1$. Ψ на обеих поверхностях постоянно. Отсюда следуют условия для функций $M(\eta)$ и $N(\eta)$, входящих в (2.4):

$$\begin{aligned} \Psi|_{\eta=\eta_0} = \text{const} \Rightarrow M(\eta_0) = 0 \quad H \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} = -U_0 \Rightarrow \frac{dN}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_0} = 0 \quad \frac{dM}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_0} = -U_0 a \\ \Psi|_{\eta=\eta_1} = \text{const} \Rightarrow M(\eta_1) = 0 \quad H \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_1} = -U_1 \Rightarrow \frac{dN}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_1} = 0 \quad \frac{dM}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_1} = -U_1 a \end{aligned}$$

Здесь $H = (\text{ch } \eta - \cos \xi)/a$ – первый дифференциальный параметр биполярной системы координат, характеризующий масштаб преобразования (2.1).

Из шести условий

$$M(\eta_0) = M(\eta_1) = 0, \quad N'(\eta_0) = N'(\eta_1) = 0, \quad M'(\eta_0) = -U_0 a, \quad N'(\eta_1) = -U_1 a$$

определяем 6 неизвестных коэффициентов функции Ψ :

$$\begin{aligned} A &= a \operatorname{cth} \beta \frac{(U_1 \operatorname{ch} \eta_1 - U_0 \operatorname{ch} \eta_0) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta - (U_1 \operatorname{sh} \eta_1 - U_0 \operatorname{sh} \eta_0) (\beta + \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta)}{\beta (\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta - 1) - \operatorname{sh} \beta (\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \beta)} \\ E &= a \frac{(U_1 \operatorname{sh} \eta_1 - U_0 \operatorname{sh} \eta_0) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta + (U_1 \operatorname{ch} \eta_1 - U_0 \operatorname{ch} \eta_0) (1 - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta)}{\beta (\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta - 1) - \operatorname{sh} \beta (\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \beta)} \\ C &= \frac{\operatorname{sh} \eta_0}{2} (E \operatorname{sh} \eta_0 + A \operatorname{ch} \eta_0 + a U_0) + \frac{\operatorname{sh} \eta_1}{2} (E \operatorname{sh} \eta_1 + A \operatorname{ch} \eta_1 + a U_1) \\ B &= -E \eta_0 - \operatorname{ch} \eta_0 (E \operatorname{sh} \eta_0 + A \operatorname{ch} \eta_0 + a U_0), \quad F = -\frac{A \operatorname{sh} \alpha}{2 \operatorname{ch} \beta}, \quad G = \frac{A \operatorname{ch} \alpha}{2 \operatorname{ch} \beta} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где введены обозначения $\alpha = \eta_0 + \eta_1$, $\beta = \eta_1 - \eta_0$.

Таким образом, получено решение обобщенной задачи Жуковского–Чаплыгина для функции тока $\Psi(\xi, \eta)$, где биполярные координаты ξ, η выражаются через декартовы координаты x, y по обращенным к (2.1) формулам

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{(x - c + a)^2 + y^2}{(x - c - a)^2 + y^2}, \quad \xi = \operatorname{arctg} \frac{x - c + a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x - c - a}{y} \quad (2.6)$$

Тогда для компонент скорости будут справедливы следующие выражения:

$$u = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \quad v = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

Выражение для комплексной скорости примет вид

$$w = \left((\operatorname{ch} \eta - \cos \xi) \frac{dN}{d\eta} + \frac{dM}{d\eta} - \frac{M(\eta) (\operatorname{sh} \eta - i \sin \xi)}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \right) \frac{\partial \eta / \partial y - i \partial \eta / \partial x}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \quad (2.7)$$

3. Структура течения при вращении одного из цилиндров при неподвижном другом. Структура течения определяется наличием неподвижных точек. Они могут быть расположены на оси x . Так на фиг. 1, на которой представлены линии тока при $\rho_1 = 1, \rho_0 = 0.3, \Delta x = 0.35$, а угловые скорости противоположно направлены ($\omega_0 = 1, \omega_1 = -4$), имеются две неподвижные точки K_0 и K_1 . Возле этих точек образуется вихрь. Однако в некоторых случаях таких точек может не быть.

Исследуем сначала этот вопрос для случая, когда внешний цилиндр неподвижен ($U_1 = 0$). Тогда функция тока будет пропорциональна U_0 , и от скорости вращения расположение неподвижных точек не зависит.

Без ограничения общности положим радиус внешней окружности $\rho_1 = 1$, а также $\Delta x > 0$, т.е. примем расположение кругов таким же, как на фиг. 1. При этом координата центра внешнего круга находится в начале координат, а внутреннего – отрицательна. Тогда координаты x неподвижных точек будут зависеть от двух параметров ρ_0 и Δx . Чтобы окружности не соприкасались, должно выполняться неравенство $\Delta x + \rho_0 < \rho_1$.

Неподвижная точка находится из уравнения равенства нулю скорости. На отрезке AB с помощью (2.4) это условие запишется так:

$$\frac{d\Psi(\pi, \eta)}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(N(\eta) + \frac{M(\eta)}{\operatorname{ch} \eta + 1} \right) = 0, \quad \eta_1 < \eta < \eta_0$$

Анализ показывает, что функция $\Psi(\pi, \eta)$ монотонна на отрезке $\eta_1 < \eta < \eta_0$ и, следовательно, таких точек внутри отрезка AB нет.

На отрезке CD неподвижная точка находится из уравнения

$$V(\eta) = \frac{d\Psi(0, \eta)}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(N(\eta) + \frac{M(\eta)}{\operatorname{ch} \eta - 1} \right) = 0, \quad \eta_1 < \eta < \eta_0$$

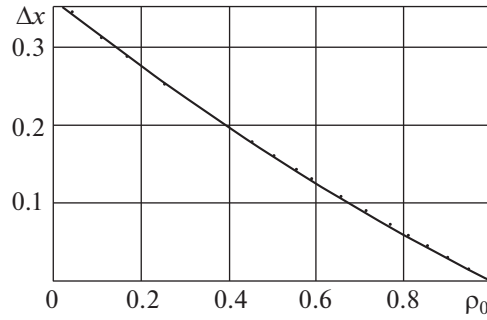


Рис. 3. Предельная кривая $\Delta x^*(\rho_0)$ для вращающегося цилиндра внутри неподвижного цилиндра

Поставим задачу определить предельную зависимость $\Delta x^*(\rho_0)$ так, чтобы при $\Delta x < \Delta x^*(\rho_0)$ неподвижных точек внутри CD не было, а при $\Delta x > \Delta x^*(\rho_0)$ неподвижная точка внутри CD возникла. Построение предельной зависимости $\Delta x^*(\rho_0)$ можно получить с помощью следующего наблюдения. Без ограничения общности полагаем $U_0 = 1$. Тогда в силу краевых условий на границах $\eta = \eta_0$ и $\eta = \eta_1$ функция $V(\eta)$ принимает значения $V(\eta_1) = 0$ и $V(\eta_0) < 0$. Если в точке η_1 производная $V'(\eta_1) < 0$, то функция $V(\eta)$ монотонно убывает на отрезке $[\eta_1, \eta_0]$ и внутри него $V(\eta) < 0$. В этом случае неподвижных точек на отрезке CD нет. В противном случае, если $V'(\eta_1) > 0$, то функция $V(\eta)$ вблизи точки $\eta = \eta_1$ положительна, а в точке $\eta = \eta_0$ отрицательна. Следовательно, $V(\eta)$ обратится в ноль внутри интервала (η_1, η_0) , и неподвижная точка будет существовать. Предельное условие

$$V'(\eta) \big|_{\eta=\eta_1} = 0 \quad (3.1)$$

Оно разделяет два случая: наличие и отсутствие неподвижной точки на отрезке CD .

Пользуясь этой идеей, можно предложить следующий алгоритм построения предельной зависимости $\Delta x^*(\rho_0)$. Задаем параметр $\Delta\eta$ и вычисляем

$$a = \text{sh } \eta_1, \quad \eta_0 = \eta_1 + \Delta\eta$$

По формулам (2.5) определяем коэффициенты как функции η_1 . По (2.4) вычисляем функции $N(\eta)$, $M(\eta)$ с коэффициентами, зависящими от η_1 . Из уравнения (3.1) находим η_1^* и $\eta_0^* = \eta_1^* + \Delta\eta$, как функции параметра $\Delta\eta$. Через них по формулам (2.3) определяем в параметрическом виде предельную зависимость $\Delta x^*(\Delta\eta)$, $\rho_0^*(\Delta\eta)$:

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_0 = \frac{\text{sh}(\eta_1^*)}{\text{sh}(\eta_1^* + \Delta\eta)}, \quad \Delta x = \text{ch}(\eta_1^*) - \frac{\text{sh}(\eta_1^*)}{\text{sh}(\eta_1^* + \Delta\eta)} \text{ch}(\eta_1^* + \Delta\eta)$$

На фиг. 3 представлена полученная по этим формулам предельная кривая $\Delta x^*(\rho_0)$. Она достаточно точно приближается интерполяционной кривой

$$\Delta x = 0.36(1 - \rho_0) + 0.08\rho_0(\rho_0 - 1)$$

Этот результат согласуется с предельной кривой, полученной в [12], где вместо Δx приведена зависимость $\Delta x/(1 - \rho_0)$.

На фиг. 4,а представлены линии тока при $\rho_1 = 1$, $\rho_0 = 0.2$, $\Delta x = 0.25$. В этом случае $\Delta x = 0.25$ меньше предельного значения 0.275. Поэтому неподвижных точек нет. Топологически картина линий тока эквивалентна картине для концентрических кругов. Если же расстояние между центрами кругов увеличить, то внутри отрезка CD появится неподвижная точка. На фиг. 4,б представлены линии тока при $\rho_1 = 1$, $\rho_0 = 0.2$, $\Delta x = 0.4$. В этом случае неподвижная точка присутствует. Кроме неподвижной точки на оси x имеются две симметрично расположенные критические точки на внешней окружности. Область между внешней и внутренней окружностью разделяется на две зоны дугой, концами которой являются эти две критические точки. Частицы

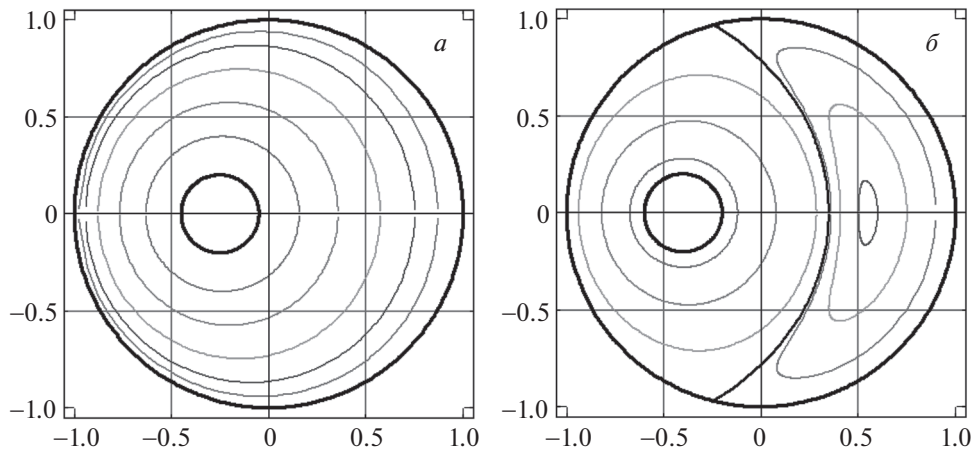


Рис. 4. Линии тока при отсутствии неподвижных точек (а) и при их наличии (б)

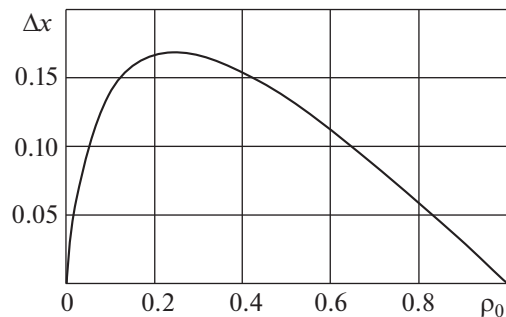


Рис. 5. Предельная кривая $\Delta x^*(\rho_0)$ для неподвижного цилиндра внутри вращающегося цилиндра

жидкости внутри каждой зоны движутся по замкнутым траекториям, не выходя за пределы своей зоны.

Исследуем теперь наличие неподвижных точек, когда внутренний цилиндр покоится: $U_0 = 0$ и обтекается потоком вязкой жидкости, который создается вращением внешнего цилиндра. Тогда функция тока будет пропорциональна U_1 и от нее расположение неподвижных точек не зависит. Положим радиус внешней окружности равным единице $\rho_1 = 1$. Тогда координаты x неподвижных точек будут зависеть от двух параметров ρ_0 и Δx . Аналогичный предыдущему случаю анализ показывает, что на отрезке AB неподвижных точек также нет. Наличие таких точек на отрезке CD определяется из условия $\Delta x > \Delta x^*(\rho_0)$. Предельная зависимость $\Delta x^*(\rho_0)$ находится аналогичными построениями. Она представлена на фиг. 5, и также согласуется с предельной зависимостью, полученной в [12].

На фиг. 6 показаны картины линий тока при $\rho_1 = 1$, $\rho_0 = 0.3$ и различных значениях Δx : $\Delta x = 0.3$ на фиг. 6,а и $\Delta x = 0.18$ на фиг. 6,б. Эти значения превосходят $\Delta x^* = 0.17$, и неподвижные точки присутствуют. Кроме неподвижной точки на оси x , есть две симметрично расположенные критические точки на внутренней границе. Образуется вихрь, присоединенный к внутренней окружности. Он ограничен дугой этой окружности и примыкающей к ее концам дугой вне внутреннего круга. Частицы жидкости внутри этой застойной зоны движутся по замкнутым траекториям, не выходя за ее пределы. По мере уменьшения Δx застойная зона уменьшается, и при $\Delta x = \Delta x^*$ совсем исчезает. На фиг. 6,в представлены линии тока при $\Delta x = 0.15 < \Delta x^*$. Здесь неподвижных точек нет, и картина линий тока топологически эквивалентна картине для концентрических кругов.

4. Поле скоростей при произвольном движении цилиндров. Рассмотрим теперь наиболее общий случай движения цилиндров, когда каждый из цилиндров вращается вокруг оси, проходящей че-

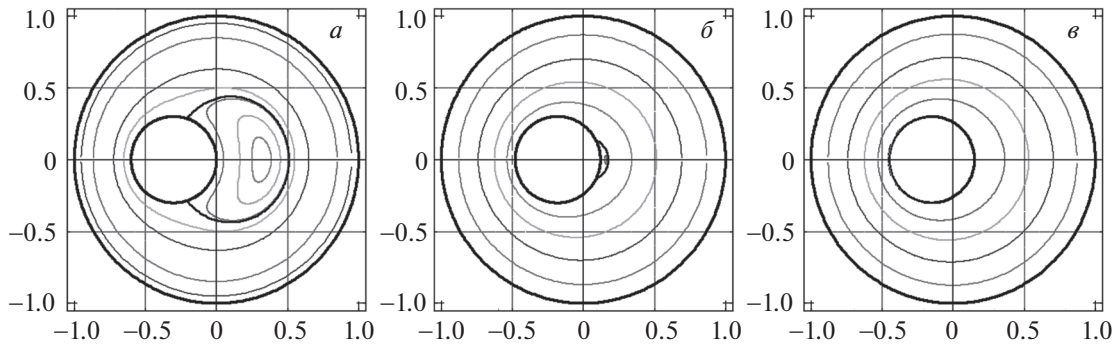


Рис. 6. Линии тока при наличии неподвижных точек (а), (б) и при их отсутствии (в)

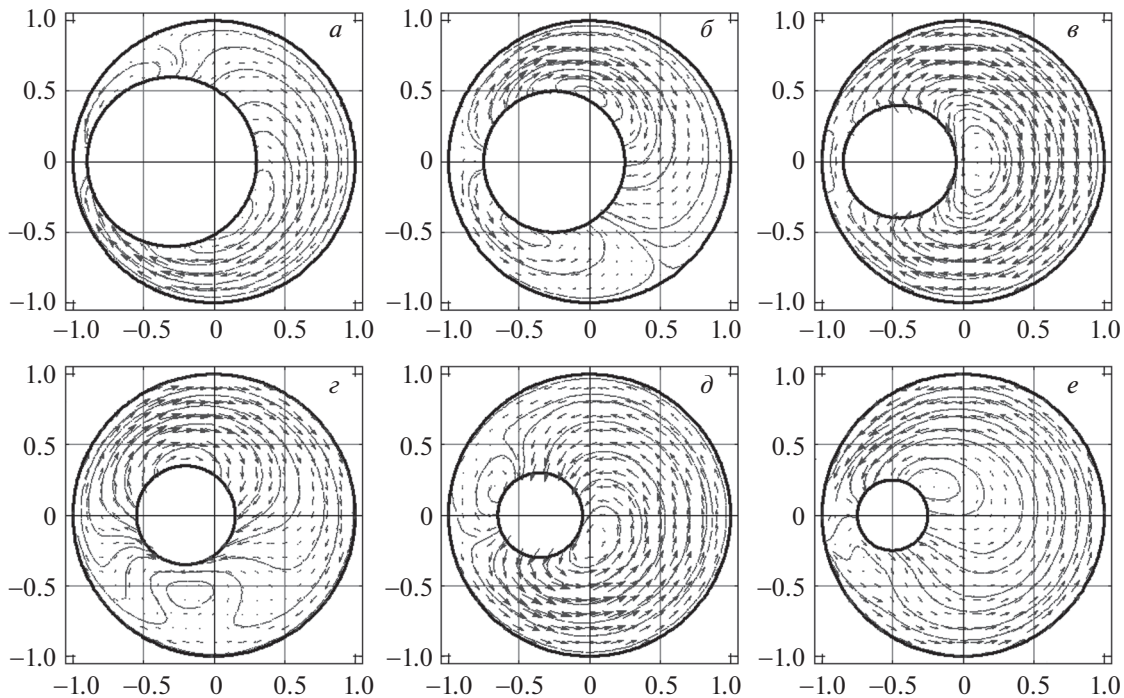


Рис. 7. Векторные поля скорости для различных значений входных параметров: $\rho_0 = 0.6$ (а), 0.5 (б), 0.4 (в), 0.35 (г), 0.3 (д), 0.25 (е); $\Delta x = 0.3$ (а), 0.25 (б), 0.45 (в), 0.2 (г), 0.35 (д), 0.5 (е); $\omega_0 = 0$ (а), 1 (б), -2 (в), 3 (г), 1.5 (д), -3 (е); $\omega_1 = 1$ (а, в, г), 0 (б), -1 (д), -2 (е); $u_0 = 1$ (а, е), -2 (б), 0 (в), -1 (г, д); $v_0 = 1$ (а, б, в), 0 (г), -2 (д), -1 (е)

рез центр его сечения, и внутренний цилиндр движется поступательно вместе со своей осью. Общность задачи в этом случае не нарушается, поскольку поступательное движение внешнего цилиндра всегда можно убрать с помощью перехода в инерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно с той же скоростью.

Пусть ω_0 и ω_1 – угловые скорости внутреннего и внешнего цилиндров соответственно; u_0 , v_0 – компоненты поступательной скорости внутреннего цилиндра. Общее решение для поступательного движения внутреннего цилиндра (внешний цилиндр покоится) будет складываться из решений в частных случаях (1.5) и (1.6): $w = u_0 w_1 + i v_0 w_2$. Для учета вращений внутреннего и внешнего цилиндров следует добавить еще линейную комбинацию $\omega_0 w_3 + \omega_1 w_4$, где поля скоростей w_3 , w_4 выражаются из (2.7). Настоящее исследование необходимо для изучения задачи перемешивания жидкости между вращающимся внешним цилиндром и произвольно движущимся внутренним цилиндром. Для некоторых частных постановок решение такой задачи представлено в монографии [16].

На фиг. 7 показаны векторные поля скоростей жидкости, заключенной между движущимися цилиндрами для некоторых различных значений входных параметров ρ_0 , Δx , ω_0 , ω_1 , u_0 , v_0 ($\rho_1 = 1$).

Заключение. Методом конформных отображений построено в компактном виде решение задачи, в котором течение создается поступательным движением цилиндра внутри неподвижного цилиндра. Исследовано обобщение решения задачи Жуковского—Чаплыгина, в котором учитывается вращение внешнего и внутреннего цилиндра с произвольной скоростью; определены компоненты скорости вязкой жидкости между вращающимися эксцентрически расположенными цилиндрами. Изучены структуры стационарных течений, когда цилиндр эксцентрично вращается внутри неподвижного цилиндра, а также, когда внутренний неподвижный цилиндр обтекается потоком вязкой жидкости, создаваемым вращением внешнего цилиндра. Аналитически построено выражение для поля скорости вязкой жидкости между двумя эксцентрически расположенными и произвольно движущимися круговыми цилиндрами.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект №14-19-01633).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. Т. 1, 2. М.: Физматгиз, 1963.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. Гидродинамическая теория смазки. М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 574 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
6. Линь Ц.-Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИИЛ, 1958. 194 с.
7. Петров А.Г. О перемешивании вязкой жидкости в слое между вращающимися эксцентричными цилиндрами // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 5. С. 741–758.
8. Петров Н.П. Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости // Инж. журн. 1883.
9. Reynolds O. On the Theory of Lubrication / Phil. Trans. 1886. V. CLXXVII. P. 157 (Paper, II, 228).
10. Жуковский Н.Е. Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие тела внутри жидкой массы / Собр. соч. Т. 2. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
11. Жуковский Н.Е., Чаплыгин С.А. О трении смазочного слоя между шипом и подшипником // Тр. Отделения физ. наук об-ва любителей естествознания. 1906. Т. 13. В. 1. С. 24–33.
12. Ballal B.Y., Rivlin R.S. Flow of a Newtonian Fluid Between Eccentric Rotating Cylinders: Inertial Effects // Arch. Rational Mech. Anal. 1976. V. 62. P. 237–294.
13. Чернявский В.М. Точное решение о ползущем цилиндрическом течении в подшипнике со свободным шипом // Докл. АН. 2008. Т. 418. № 1. С. 42–45.
14. Терентьев А.Г., Терентьев А.А. Движение цилиндра в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Изв. НАНИ ЧР. 2002. № 2. С. 44–62.
15. Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S. The Hydrodynamics of Cavitating Flows. Backbone Publ. Comp., USA, 2011. 598 p.
16. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2009. 520 с.