# К вопросу об обращении теоремы Лагранжа.

**Четаев Н. Г.** (Казань).

Пусть система дифференциальных уравнений возмущенного движения имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'_s}\right)-\frac{\partial F}{\partial x_s}=0, \qquad \frac{\partial x_s}{dt}=x'_s \qquad (s=1,\ 2,\dots,\ k)$$

где

$$F=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}x_i'^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}v_{ij}x'_ix_j'+U,$$

а $v_{ij}=v_{ji}$ и $U$—суть независящие от $t$ голоморфные функции $x_1,\ x_2,\dots,\ x_k$, обращающиеся в нуль, когда все эти переменные делаются равными нулю. При том функция $U$ такова, что разложение ее начинается членами не ниже второго порядка.

Рассматриваемый здесь случай может представиться например при исследовании устойчивости равновесия (в обычном смысле) при существовании силовой функции $U$ для механической системы с голономными и независящими от времени связями.

Лагранж доказал, что если для положения равновесия $U$ есть изолированный maximum, то равновесие устойчиво.

Вопрос о том, что будет, если силовая функция вблизи положения равновесия может принимать большие значения, т. е. положительные, кроме ряда всем известных частных случаев просто не удалось разрешить.

Здесь я намерен доказать, что если силовая функция есть форма и может принимать положительные значения, то равновесие неустойчиво.

С этой целью рассмотрим функцию

$$2V=H^2-\alpha^2\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\frac{\partial F}{\partial x'_i}\right)^4,$$

где $H=F-2U$, а $\alpha$ некоторая положительная постоянная; $\alpha$ выбираем достаточно малой, чтобы в области $V<0$, содержащей в себе очевидно точки, удовлетворяющие соотношению $H=0$, значения функции $U$ были бы положительны. Это сделать—всегда возможно, если $U$ принимает для некоторых значений переменных $x_s$, сколь бы малы численно они не были, положительные значения.

В силу дифференциальных уравнений возмущенного движения найдем, учитывая, что $H$ является интегралом,

$$V''=2\alpha^2\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\frac{\partial F}{\partial x'_i}\right)^3\left[\sum_{i=1}^{k}x_i'^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(v_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}x_s\frac{\partial v_{ij}}{\partial x_s}\right)x_i'x_j'+\sum_{i=1}^{k}x_i\frac{\partial U}{\partial x_i}\right].$$

При замене всех $x_s'$ на $-x_s'$ функция $V$ не меняется, а функция $V'$ меняет лишь знак на обратный. Поэтому существуют области, где будут совместно удовлетворяться неравенства

$$V < 0 \quad \text{и} \quad V' < o$$

Внутри этих областей не найдется точек, для которых уничтожалось бы выражение

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}, \tag{1}$$

так как для таких точек очевидно $V \geqslant o$. Поэтому из этих областей мы можем выбрать по меньшей мере одну такую область $C$, внутри которой выражение (1) остается постоянно положительным и нулем лишь на границе $V = o$.

Если внутри области $C$ выражение

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{2}$$

остается всегда при достаточно малых $|x_s|$ положительным, то ясно, что эта область $C$, для внутренних точек которой удовлетворяется неравенство $VV' > o$, будет для численно достаточно малых $x_s$ ограничена $V = o$. Условия теоремы, данной мной в Докладах Академии Наук т. 1 (1934 г.) при этом будут все удовлетворены, и следовательно можем заключить, что невозмущенное движение неустойчиво.

Если $U = U_m + U_{m+1} + \ldots$, где вообще $U_i$ обозначает целую однородную функцию $i$-той степени величин $x_s$, то выражению (2) на основании теоремы Эйлера об однородных функциях возможно придать вид

$$mU_m + (m+1)\ U_{m+1} + \ldots$$

Всякий раз, когда для положения равновесия силовая функция обращается в minimum и это обнаруживается из совокупности членов наинизшего порядка $U_m$ в разложении приращения этой функции по степеням приращений координат, мы заключаем о положительности выражения (2) в области $C$, а отсюда о неустойчивости равновесия. В случае, когда положение равновесия является изолированным minimum'ом силовой функции, теорема эта указана Ляпуновым (*Общая задача*, стр. 54, *Journal de Mathématiques* 1897, p. 93).

В том случае, когда $U = U_m$, выражение (2), очевидно равное $mU_m$, будет положительно в области $C$ и значит равновесие при этом неустойчиво.