Об одной мысли Пуанкаре [1]).

Четаев Н. Г. (Казань).

2. Ряды Будана.

Выясним алгебраическую природу метода Ляпунова.

Характеристики Кронекера, через которые легко выражаются необходимые и достаточные условия устойчивости или неустойчивости движений, являются обобщением известной в алгебре теоремы Штурма об отделении вещественных корней целых алгебраических уравнений. Не менее хорошо известно также и то, что затруднения при вычислении функций Штурма породили в алгебре другие, правда неполные, но зато более практические методы Будана-Фурье и Ньютона.

Метод Будана заключается в рассмотрении производных различных порядков от заданной функции $f(x)$

$$f, f', \ldots, f^{\nu}, \ldots$$

Для целых алгебраических функций $f(x)$ последовательность производных естественно обрывается на f^n, если n есть степень полинома $f(x)$. В иных случаях последовательность производных возможно оборвать на f^k; остающийся при этом ряд Будана f^{ν} $(\nu = 0, 1, \ldots, k)$ дает возможность отделять число корней непрерывной, и имеющей производные, функции $f(x)$ на интервал (α, β).

Чтобы начать с чего-либо определенного, я рассмотрю интервал (α, β) и построю выпуклую функцию $\Phi(y, x)$ так, чтобы область, где $\Phi < 0$, была ограничена и отсекала на оси x отрезок $\alpha\beta$. За $\Phi = 0$ я могу, в частности, взять прямоугольник со сторонами, параллельными осям y и x: $y = \varepsilon$, $y = -\varepsilon$, $x = \alpha$, $x = \beta$.

Из определения характеристики Кронекера [8] как полуразности точек входа и выхода, для трех ограниченных, непрерывных функций u, v, w (с непрерывными производными), если корни этих функций простые, не совпадают и не лежат на контуре $\Phi = 0$, я имею

$$\chi(\Phi, uv, w) = -\frac{1}{2}\sum_{uv=0}[wduw] = -\frac{1}{2}\sum_{u=0}[wvdu] - \frac{1}{2}\sum_{v=0}[wudv];$$

или, другими словами,

$$\chi(\Phi, uv, w) + \chi(\Phi, vw, u) + \chi(\Phi, wu, v) = 0.$$

Для случая многих переменных аналогичная формула теории характеристик доказывается также просто.

Я предположу теперь, что при $x = \alpha$ и при $x = \beta$ $(\alpha < \beta)$ ни одна из функций f^{ν} ряда Будана, который пока состоит из неопределенного числа членов, не обращается в нуль. Число корней функций $f(x)$ на интервале $(\alpha\beta)$ выражается согласно теоремы Пикара [2] характеристикой

$$\chi(\Phi, yf', f).$$

---

[1]) Статья является продолжением одноименной работы, помещенной в „Сборнике КАИ" № 2.

Доказанное здесь общее соотношение позволяет для каждой пары последовательных производных $f^{\nu-1}$ и f^{ν} функции $f(x)$ написать равенства

$$\chi(\Phi, y, f^{\nu-1} f_{\nu}) = \chi(\Phi, yf^{\nu}, f^{\nu-1}) + \chi(\Phi, yf^{\nu-1}, f^{\nu}).$$

Если при $\nu = k$ я имею

$$\chi(\Phi, yf^{k-1}, f^{k}) = 0,$$

то последовательность производных f^{ν} я оборву на функции f^{k}. В случае целой алгебраической функции F число k равняется по крайней мере степени функции F.

Выписанные соотношения между функциями $f^{\nu-1}$ и f^{ν} я просуммирую ($\nu = 1, \ldots, n$); буду иметь

$$(1) \ldots \chi(\Phi, yf', f) = \sum_{\nu=1}^{k} \chi(\Phi, y, f^{\nu-1} f^{\nu}) - \sum_{\nu=1}^{k=1} (\chi(\Phi, yf^{\nu-1}, f^{\nu}) + \chi(\Phi, yf^{\nu+1} f^{\nu})).$$

Это и есть, хорошо известная для полиномов, теорема Будана-Фурье.

Действительно, первая сумма в правой части равенства есть число потерь перемен знака в ряде Будана ($\nu = 0, 1, \ldots k$) при переходе от $x = \alpha$ к $x = \beta$.

Вторая сумма представляет, во-первых, какое-то неотрицательное число, т. к. согласно теореме Пикара о корнях всегда имеется соотношение

$$\chi(\Phi, yf^{\nu+1}, f^{\nu}) \geqslant |\chi(\Phi, yf^{\nu-1}, f^{\nu})|;$$

и во-вторых,— число четное. Чтобы показать последнее, я рассмотрю функцию

$$F = \frac{f^{\nu-1} + \mu f^{\nu+1}}{1 + \mu};$$

характеристика $\chi = \chi(\Phi, yF, f^{\nu})$ при изменении параметра μ от нуля до бесконечности переходит от первой характеристики рассматриваемой суммы $\chi(\Phi, yf^{\nu-1}, f^{\nu})$ ко второй $\chi(\Phi, yf^{\nu-1}, f^{\nu})$. Теорема [5] об изменении характеристик при изменении функций, какую я употреблял в n° 1, дает

$$\chi(\Phi, yf^{\nu-1}, f^{\nu}) - \chi(\Phi, yf^{\nu+1}, f^{\nu}) = \sum_{r} \chi(\xi^{r});$$

Здесь точки ξ^{r} изменения характеристики определяются уравнениями $\Phi = 0, yF = 0, f^{\nu} = 0$ при $\mu > 0$. Согласно предположения, что ни одна из функций f^{ν} ряда Будана не уничтожается для $x = \alpha$ и $x = \beta$, имеем, что точки ξ^{r} в этом случае могут лежать на $\Phi = 0$ лишь на линиях, где имеют место совместные равенства $F = 0$ и $f^{\nu} = 0$ ($\mu > 0$); такие ξ^{r} точки будут входить при нашем выборе Φ необходимо парами; для них

$$\chi(\xi^{r}) = \left[\frac{\partial(\Phi, yF, f^{\nu})}{\partial(\mu, y, x)}\right] = \left[\begin{vmatrix} 0 & \Phi_y & \Phi_x \\ y f^{\nu+1} & 0 & yF' \\ 0 & 0 & f^{\nu+1} \end{vmatrix}\right] = -1$$

Следовательно, если вторую сумму я обозначу через $2h$ ($\geqslant 0$), то выражение (1) я могу записать в следующем виде:

$$\chi(\Phi, yf', f) = \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{k} [f^{\nu} f^{\nu-1}]\right)_{\alpha}^{\beta} - 2h;$$

т. е. число корней функции $f(x)$ между α и β ($\alpha < \beta$) равно, самое большее, числу потерь перемен знака в ряде Будана f^{ν} ($\nu = 0, 1, \ldots k$) при переходе от $x = \alpha$ к $x = \beta$; а если не равно, то меньше на число четное.

3. Функции Ляпунова.

Рассмотрим дифференциальные уравнения возмущенного движения:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad (s=1, 2 \ldots, n)$$

где известные голоморфные функции X_s переменных x_s с коэффициентами, являющимися непрерывными функциями t, обращаются в нуль, когда все x_s нули.

Вопрос об устойчивости движения я буду рассматривать, пользуясь некоторой определенно положительной функцией V, зависящей в общем случае от времени t и от вещественных переменных x_s. Область конечной устойчивости, если задача будет стоять об этом, я предположу заданной через независящую от t определенно положительную функцию W, для которой всегда $V - W \geqslant 0$, следующим неравенством $W \leqslant c$, где c есть некоторая положительная постоянная [6].

Начальные значения функций $x_s = x_s^0$ при $t = t_0$ я буду выбирать, так, чтобы имело место неравенство $C_0 - c_0 < 0$ $(c_0 < c)$.

Чтобы записать в характеристиках условия устойчивости, рассмотрю плоскость y, t. Если вопрос стоит о конечной устойчивости за конечный промежуток времени от $t = t_0$ до $t = T$ $(T > t_0)$, то введем в рассмотрение область $\Phi < 0$, ограниченную контуром $\Phi(y, t) = 0$, который в плоскости y, t хорошо может быть прямоугольником, образованным прямыми $t - t_0 = 0$, $t - T = 0$, $y - c - \varepsilon = 0$, $y + \varepsilon = 0$; здесь ε обозначает произвольно малую положительную постоянную.

Если в функцию $V - c$ я вставляю вместо переменных x_s те их значения $x_s(t)$, какие они имеют согласно дифференциальных уравнений возмущенного движения и при начальных данных x^0_s при $t = t_0$, то получающуюся при такой подстановке функцию времени t я обозначаю через $f(t)$.

Если при этом

$$\chi(\Phi, yf', f) = 0,$$

то рассматриваемое движение будет очевидно устойчиво в конечном и за конечный промежуток времени $T - t_0$; если же $\chi(\Phi, yf', f) > 0$, то в движении за время от t_0 до T функция V примет по меньшей мере раз значение c.

В силу дифференциальных уравнений возмущенных движений построим ряд последовательных, полных производных от функции f по времени. Я буду получать ряд Будана

$$f, f^1, \ldots, f^k,$$

если

$$f(\Phi, yf^{k-1}, f^k) = 0. \qquad (2)$$

В некоторых случаях, представляющих для практика большой интерес, последнее соотношение возможно подметить, не интегрируя дифференциальных уравнений возмущенных движений; совершенно так же, как не интегрируя уравнений, мы можем строить иногда функции Ляпунова. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти ряд Будана для некоторой функции V, то в некоторых случаях вопросы об устойчивости будут решаться очень просто.

Действительно. Мы знаем, что $\chi(\Phi, yf', f)$ равна, самое большее, числу потерь перемен знака в ряде Будана при переходе от t_0 к T; и, если не равна, то меньше на число четное. Если движение неустойчиво, я всегда могу найти такое значение времени $t_1 \leqslant T$ и такие начальные значения переменных $x_s = x_s^0$, что за время от t_0 до t, уравнение $V - c = 0$ удовлетворялось всего один раз для какого-либо проме-

жуточного значения времени и что для $t=t_1$ имеет место неравенство $V-c>0$. Следовательно, если соотношение (2) имеет место при всяком $T>t_0$, то в случае неустойчивости при соответствующем выборе x_s^0 в ряде Будана при переходе от t_0 к t_1 должно быть число потерь перемен знака нечетным и положительным. Это есть необходимое условие неустойчивости. Отсюда следует общее предложение, что невозмущенное движение будет устойчивым, если число перемен знака в ряде Будана при переходе от t_0 к t_1 ($\leqslant T$) есть для каждого такого значения t_1 либо число отрицательное, либо нуль, либо четное положительное число.

Практическое вычисление функций f^ν ряда Будана легко осуществимо для $t=t_0$ (для определенного возмущенного движения при начальных данных x^0_s) и представляет принципиальные затруднения для иного другого значения времени, т. к. по замыслу прямого метода мы не должны интегрировать наши уравнения. Но так как в ряде Будана нас интересуют лишь знаки функции f^ν, в некоторых случаях мы можем задачу об устойчивости определенного возмущенного движения x_s^0 все же разрешить.

Например, если ряд Будана при начальном значении времени $t=t_0$ и переменных x_s^0 не имел ни одной перемены знака, то данное возмущенное движение будет устойчивым в конечном и до момента времени T, для которого имеет место соотношение (2). Если это соотношение имеет место, либо всегда, либо для произвольно большого значения T, то устойчивость будет за сколь угодно большой промежуток времени.

Можно было бы высказать целый ряд аналогичных предложений. Чтобы отметить связь такого метода исследований вопроса об устойчивости движений с известным прямым методом Ляпунова, я рассмотрю ряд Будана, состоящий всего из двух ф нкций f и f'. Это может случиться когда $f(\Phi, yf, f')=0$. Если я рассматриваю вопрос об устойчивости на произвольно большой промежуток времени, последнее равенство будет иметь место либо, когда функция $f'=0$, либо, когда f' знакопостоянна. Если V' будет знака обратного с V или нулем, то при любом t_0 в отвечающем ряде Будана f_0, f'_0 не будет перемен знака; т. е. невозмущенное движение будет всегда равномерно устойчивым в области, где существует функция v. А так как при этом не делается никаких ограничений на выбор постоянной c, то движение будет устойчивым и в бесконечно малом. Это и есть известная теорема Ляпунова об устойчивости

Если ряд Будана состоит из трех функций f, f', f'' (это случится, когда $f(\Phi, yf', f'')=0$), то возможно высказать теоремы об устойчивости, аналогичные теореме Ляпунова. На них я не буду останавливаться и лишь укажу, что движения, для которых $v_0'<0$, будут при этом устойчивы в конечном ($w<c$) и за промежуток времени от t_0 до T.

[8] L. Kronecker's Werke Bd 1.