Н. Г. ЧЕТАЕВ.

Об устойчивых траэкториях динамики.

Устойчивость — явление принципиально общее—как-то должна повидимому проявляться в основных законах природы.

Этой мыслью почти никто в механике не занимался; а это как раз и обозначает, что ей, хотя бы из-за одного нетерпеливого любопытства следует заняться. Все равно, какое мнение будет связано позднее с этой мыслью, сейчас во всяком случае представляется интересным посмотреть, какие следствия могут быть из нее выведены.

Некоторые следствия этой мысли оказываются согласными с опытом. Может быть достаточно только отказаться от требования возможно малых отклонений теории от эксперимента, чтобы все эти согласования представились чистой случайностью. Во всяком случае, если последнее и произойдет, то это еще не докажет, что усилия настоящей работы, какого о ней мнения ни придерживаться, совершенно бесполезны.

1. Возмущенные движения.

Как находятся законы природы?

К объяснению какого-либо механического явления природы сначала подходят с определенными гипотезами о коренных движущих силах, что позволяет для переменных x_s изучаемой материальной системы писать некоторые дифференциальные уравнения движения. И в том случае, когда решения этих дифференциальных уравнений кладут значения изучаемых функций Φ_k вблизи их опытных данных (в пределах ошибок эксперимента), то гипотезу принимают за закон природы, по крайней мере до тех пор, пока не обнаружатся в опыте новые и несовместимые с принятой гипотезой факты. И когда обнаруживаются такие факты, создаются новые гипотезы, не стесняющие себя привычными до этого времени основными понятиями, если только в рамках последних нельзя бывает получить хороших совпадений с опытом.

Но когда отклонения теории от эксперимента могут быть незначительны?

Всякий раз, когда мы подходим к объяснению тех или иных явлений природы, мы не должны забывать, что в действительности никакое явление не представляется в чистом виде. Сколь бы точно ни были определены действующие на систему силы, всегда будут существовать неучтенными незначительные возмущения. Эти последние, сколь бы малы они ни были, влияют на движение материальной системы и дают в эксперименте наблюдаемым функциям не теоретические значения Φ_k, а некоторые иные F_k.

Если при возмущающих силах определенного типа и при малых возмущениях начальных данных, не превосходящих численно некоторой малой величины ε, для всякого t, превосходящего начальный момент t_0, выполняется неравенство

$$\Sigma(F_k - \Phi_k)^2 < L$$

и при чем для произвольного L всегда найдется отличное от нуля ε, то невозмущенное (теоретическое) движение механической системы при рассматриваемых возмущающих силах называется устойчивым по отношению к функциям Φ_k, в противном случае—неустойчивым.

Согласно этому определению устойчивых и неустойчивых движений в действительности общий характер будут сохранять, по крайней мере по отношению к функциям Φ_k, только устойчивые по отношению к Φ_k теоретические, невозмущенные движения. Последнее обстоятельство отнюдь не значит, что все движения, определенные принятыми законами, являются устойчивыми при любых малых возмущающих силах и произвольно малых возмущениях начальных данных. Оно обозначает, что законы эти по основному требованию малых отклонений от опытных данных сами по себе не могут опираться, кроме как на движения, устойчивые в той или иной мере по отношению к наблюдаемым функциям Φ_k.

Это предложение, являющееся простым следствием определения устойчивых невозмущенных движений и требования малых отклонений между теорией и экспериментом и относящееся более к структуре нашего научного знания, мы назовем *постулатом устойчивости*, и примем без оговорок. Все равно, будет ли позднее этот постулат подтвержден или опровергнут, сейчас во всяком случае представляется интересным посмотреть, какие следствия могут быть из него выведены.

Применение высказанного постулата мы начнем с динамики Ньютона. Отдельные вопросы устойчивости движений были рассмотрены в классической механике с частных точек зрения Лагранжем, Пуанкаре, Ляпуновым.

Вообразим некоторую механическую систему с n степенями свободы и пусть отдельные состояния такой системы вполне описываются каноническими вещественными переменными

$$q_1, \cdots, q_n \text{ и } p_1, \cdots, p_n,$$

где q_j суть Лагранжевы координаты, а p_j—сопряженные им импульсы. Мы будем предполагать связи голономными, не зависящими от времени t, а силы, действующие на систему, — консервативными с независящей от времени силовой функцией U. Пусть

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij} p_i p_j$$

обозначает живую силу материальной системы; функции $g_{ij} = g_{ji}$ зависят только от координат q_j.

Полный интеграл, отвечающего нашей материальной системе, дифференциального уравнения Гамильтона-Якоби мы обозначим так:

$$-ht + V(q_1, \cdots, q_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n);$$

в нем α_j представляют независимые постоянные, из которых ни одна не является просто приданной; h обозначает постоянную живой силы и представляет, следовательно, некоторую функцию от постоянных α_j

$$h = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

Согласно известной теоремы Якоби общее решение механической задачи будет отсюда определяться формулами:

$$(1) \qquad \beta_i = -t\frac{\partial h}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} \text{ и } p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

где β_i суть некоторые постоянные. Возможные движения механической системы определяются различными значениями постоянных α_j и β_j.

То движение материальной системы, устойчивость которого нам интересно изучить, мы назовем ведущим или невозмущенным движением. И вначале мы будем рассматривать вопрос об устойчивости такого движения по отношению к переменным q_j при возмущении только начальных значений переменных (или значений постоянных α_j, β_j) и при отсутствии возмущающих сил.

Чтобы из возможных движений материальной системы выделить движения, устойчивые по отношению к переменным q_j при возмущении одних только начальных данных, рассмотрим дифференциальные уравнения в вариациях Пуанкаре, установленные им в *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* t. 1, p. 166. Если через ξ_j и η_j обозначить соответственно вариации координат q_j и импульсов p_j, а через

$$H(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n) = T - U$$

функцию Гамильтона, то уравнения в вариациях Пуанкаре для нашей материальной системы будут иметь вид:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i}\xi_j + \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i}\eta_j, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i}\xi_j - \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i}\eta_j, \end{aligned} \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

Возмущенные движения, близкие к невозмущенному, определяются различными значениями постоянных α_j и β_j, численно сколь угодно мало отличающимися от их значений для ведущего движения. В дальнейшем мы будем рассматривать возмущения ведущего движения, происходящие от изменения одних только постоянных β_j, и изучать устойчивость по отношению к переменным q_j. Другими словами мы будем изучать известного рода условную устойчивость.

Согласно этого предположения о характере начальных возмущений из решения Якоби (1) непосредственно следуют с точностью до величин первого порядка такие соотношения:

$$\eta_i = \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\xi_j \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Отсюда, если учесть явное выражение функции Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} \sum g_{ij} p_i p_j - U,$$

первую группу дифференциальных уравнений в вариациях Пуанкаре (2) возможно записать так:

$$(3) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j,s} \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \left(g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Здесь переменные q_j и постоянные α_j, встречающиеся в правых частях, должны быть, разумеется, заменены их значениями, отвечающими ведущему или невозмущенному движению.

Итак, уравнения для вариаций координат Лагранжа при возмущении начальных данных лишь через изменение постоянных β_i представляют в первом приближении систему дифференциальных уравнений (3) линейных относительно ξ_s с коэффициентами, являющимися некоторыми определенными функциями времени t.

Перейдем к вопросу об устойчивости.

Вопрос об устойчивости ведущего движения при возмущении всех начальных данных (α_j и β_j) представляет известные трудности, так как случай канонических уравнений принадлежит к тем исключительным, когда по первому приближению нельзя ничего серьезно судить об устойчивости невозмущенного или ведущего движения. В этом случае уравнениями первого приближения являются уравнения в вариациях Пуанкаре (2).

Указанные трудности происходят из следующих весьма важных свойств канонических уравнений.

Уравнения в вариациях Пуанкаре (2), если систему ее $2n$ независимых решений обозначить через

$$\xi_{1\nu}, \cdots, \xi_{n\nu}, \eta_{1\nu}, \cdots, \eta_{n\nu}, \qquad (\nu = 1, \cdots, 2n)$$

имеют такие, установленные Пуанкаре инварианты

$$\sum_j (\xi_{j\nu} \eta_{js} - \eta_{j\nu} \xi_{js}) = C_{\nu s},$$

где постоянные $C_{\nu s}$ вследствии независимости рассматриваемых решений будут таковы, что во всякой группе

$$C_{\nu 1}, \cdots, C_{\nu 2n},$$

каково бы ни было данное число ν, найдется по крайней мере одна постоянная $C_{\nu s}$, отвечающая отличному от ν индексу s, которая не будет нулем.

Если к такому инварианту применить теорию характеристичных чисел Ляпунова (*Общая задача об устойчивости движения*, стр. 26), то непосредственно заключаем, что характеристичное число левой части инвариантного соотношения, отвечающего отличной от нуля постоянной $C_{\nu s}$, есть нуль.

Характеристичным числом ν—того решения называется наименьшее из характеристичных чисел функций $\xi_{1\nu}, \cdots, \xi_{n\nu}, \eta_{1\nu}, \cdots, \eta_{n\nu}$. Характеристичное число произведения двух функций не менее суммы их характеристичных чисел. Характеристичное число суммы двух функций равно наименьшему из характеристичных чисел этих функций, когда эти числа различны, и не меньше их, когда они равны.

Отсюда, обозначая характеристичное число ν—того решения через λ_ν, можем заключить, что

$$\lambda_\nu + \lambda_s \leqslant 0.$$

Если все характеристичные числа λ_ν для уравнений в вариациях Пуанкаре (2) положительны, то ведущее или невозмущенное движение материальной системы будет в первом приближении устойчиво. Если же среди характеристичных чисел λ_ν имеется по меньшей мере одно отрицательное число, то—в первом приближении неустойчиво.

Отсюда и из последнего неравенства просто следует, что для устойчивости ведущего или невозмущенного движения рассматриваемой материальной системы необходимо (в первом приближении), чтобы все характеристичные числа были нулями

$$\lambda_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \cdots, 2n). \tag{4}$$

Характеристичные числа λ_ν дифференциальных уравнений (2) являются некоторыми функциями постоянных α_j и β_j, определяющих ведущее или невозмущенное движение по формулам Якоби (1). Поэтому необходимые условия устойчивости (4) представляют систему $2n$ уравнений относительно $2n$ постоянных α_j и β_j; решение этой системы уравнений (4) будет давать для постоянных α_j и β_j значения, которым только и могут отвечать устойчивые по отношению к переменным q_j и p_j движения материальной системы при возмущении только начальных данных.

Определение характеристичных чисел λ_ν как функций постоянных α_j и β_j представляет очень трудную проблему. Поэтому, не имея общих методов решения этой важной проблемы, мы будем вынуждены подходить к задаче устойчивости различными, иными путями.

Из необходимых условий устойчивости по первому приближению (4) возможно выделить n соотношений, куда будут входить лишь постоянные α_j полного интеграла Якоби. Действительно. Если ведущее движение материальной системы есть устойчивое при любых возмущениях начальных данных, то оно должно быть устойчивым при возмущении одних только постоянных β_j. Но в последнем случае уравнениями первого приближения относительно ξ_j будут дифференциальные уравнения в вариациях (3). И следовательно, если характеристичные числа решений уравнений (3) обозначить через

$$\varkappa_1, \cdots, \varkappa_n,$$

то и они необходимо должны быть, при этих условиях, все нулями для устойчивого ведущего движения.

Если уравнения в вариациях (3) суть правильные, то согласно известной теореме Ляпунова (*Общая задача*, стр. 40), сумма характеристичных чисел $\Sigma \varkappa_s$ равняется характеристичному числу выражения

$$e^{\int L dt},$$

где

$$L = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j}\right).$$

А это значит, что при этих условиях для устойчивых или невозмущенных движений механической системы характеристичное число последнего выражения должно быть нулем, ибо при этом необходимо $\Sigma \varkappa_s = 0$.

Если уравнения в вариациях (3) суть кроме того еще и приводимые и если при этом определитель $\| \gamma_{ij} \|$ преобразования

$$x_i = \sum_j \gamma_{ij} \xi_j, \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

приводящего систему (3) к системе дифференциальных уравнений относительно переменных x_i с постоянными коэффициентами, имеет некоторую постоянную и отличную от нуля величину, а коэффициенты γ_{ij} суть непрерывные и ограниченные функции t, их первые производные суть функции такого же характера, то характеристичное число интересующего сейчас нас выражения очевидно (из теоремы Абеля) не может быть нулем, кроме как для случая, когда

$$L = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) = 0. \tag{5}$$

Если при последних допущениях уравнения (3) разбиваются на системы дифференциальных уравнений с разделенными для всякого t переменными, то аналогичные (5) соотношения необходимо существуют для каждой группы изолированных переменных, если ведущее движение устойчиво в первом приближении при возмущении начальных данных.

2. *Потенциальные возмущающие силы.*

Теперь вообразим, что на материальную систему, кроме учитываемых в теории движущих сил с силовой функцией U_0, действуют еще малые неучитываемые или возмущающие силы. Изучение начнем с того весьма естественного для нашей природы случая, когда возмущающие силы допускают силовую функцию W.

И пусть, как и раньше, материальная система с n степенями свободы, стеснена голономными и независящими от времени t связями, определена каноническими вещественными переменными $q_1, \cdots, q_n$ и $p_1, \cdots, p_n$, и имеет прежнее выражение для живой силы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij} p_i p_j.$$

Коэффициэнты g_{ij} согласно условий, наложенных на связи, суть функции только Лагранжевых координат q_j.

Действительное движение материальной системы будет происходить в поле всех сил с общей силовой функцией

$$U = U_0 + W;$$

оно очевидно вообще не совпадает с теоретическим движением.

Необходимые условия устойчивости (в первом приближении) при возмущении также и начальных данных будут иметь вид, выясненный в предшествующем параграфе, с той лишь разницей, что теперь V будет полным интегралом Якоби для действительного движения материальной системы, а не для теоретического, не учитывающего возмущающих сил, или W.

По замыслу основной задачи постулата устойчивости нам наперед неизвестно точное выражение возмущающих сил, иначе их силовую функцию W проще было бы прямо включить в теорию. Следовательно, полный интеграл Якоби для действительного движения V мы также точно не знаем и можем предполагать лишь его существование, а в некоторых случаях— его общие свойства. Это обстоятельство делает задачу определения характеристичных чисел λ_ν или $\varkappa_j$ для дифференциальных уравнений в вариациях исключительно трудной. И чтобы эти трудности хотя-бы частично обойти, мы будем нашу задачу устойчивости пытаться разрешать так:

1⁰. Сначала мы будем рассматривать ведущие движения материальной системы в поле всех (и коренных U_0 и возмущающих W) сил, — иными словами возможные действительные движения. Таким образом эти ведущие движения уже не будут очевидно невозмущенными, теоретическими движениями материальной системы. И будем изучать устойчивость таких ведущих или действительных движений при возмущении начальных данных.

Необходимые условия устойчивости представят при этом некоторую систему совместных уравнений от постоянных α_j и β_j, отвечающих действительным движениям материальной системы.

2⁰. Затем будем искать случаи, когда такие условия устойчивости не будут явно зависеть от возмущающих сил. Неявно возмущающие силы могут входить через некоторые или все постоянные α_j и β_j, а это значит, что эффективность критериев, лишь явно не зависящих от W может иметь место либо когда входящие в них постоянные α_j и β_j совершенно не зависят от W, либо когда эти постоянные имеют самостоятельный физический смысл.

Решение задачи 1⁰, как было замечено, приведено в первом параграфе. Для задачи 2⁰ из этих решений здесь мы остановимся на одном и именно: если уравнения в вариациях (3) для ведущего, теперь уже действительного, движения являются приводимыми с постоянным определителем подстановки, то одним из необходимых условий устойчивости ведущего движения будет соотношение (5)

$$\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)=0.$$

Теперь наша задача 2⁰ состоит в следующем: необходимо в этом соотношении выявить по меньшей мере одну постоянную полного интеграла Якоби для действительных движений; и при том эта постоянная либо вовсе не должна зависеть от возмущающих сил, либо она должна иметь самостоятельный физический смысл.

Последнее легче. Рассматриваемая материальная система консервативна, имеет в действительном движении интеграл живой силы

$$T=U_0+W+h;$$

и поэтому за такую постоянную естественно принять постоянную живой силы $h=h(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, которая при соответствующем определении силовой функции U имеет с физической точки зрения смысл полной энергии.

Чтобы выявить h, мы введем теперь в соотношение (5) вместо функции V новую функцию ψ, определенную равенством

$$\psi = Ae^{ikV},$$

где A есть некоторая вещественная функция только от координат q_j, определить которую мы оставим на после; k есть некоторая постоянная, а $i = \sqrt{-1}$.

Отсюда имеем

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{1}{ik}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q_j} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right),$$

и следовательно, соотношение (5) будет иметь вид

$$\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial q_j}\left[g_{ij}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q_j} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right)\right] = 0,$$

или лучше

$$(6)\qquad \frac{1}{\psi}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(g_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right) - \frac{1}{A}\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right) - \\ - \frac{1}{\psi^2}\sum_{ij} g_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_j} + \frac{1}{A^2}\sum_{ij} g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial q_j} = 0.$$

Закон живых сил для действительного движения, если использовать решение Якоби (1), просто записывается через функцию ψ

$$-\frac{1}{2k^2}\sum_{ij} g_{ij}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial q_i}\right)\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q_j} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right) = U_0 + W + h$$

или лучше в развернутом виде

$$\frac{1}{\psi^2}\sum_{ij} g_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_j} + \frac{1}{A^2}\sum_{ij} g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial q_j} - \\ - \frac{2}{\psi A}\sum_{ij} g_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial q_j} = U_0 + W + h.$$

Складывая это соотношение с уравнением (6), мы будем иметь необходимое условие устойчивости (по первому приближению) в таком виде

$$(7)\qquad \frac{1}{\psi}\sum\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right) - \frac{1}{A}\sum\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right) - \\ - \frac{2}{A}\sum g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_j}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial q_i}\right) + 2k^2(U_0 + W + h) = 0.$$

Это уравнение не будет очевидно содержать силовую функцию возмущающих сил W, если функцию A возможно определить так, чтобы

$$-\frac{1}{A}\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right) - \frac{2ki}{A}\sum_{ij} g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_j}p_i + 2k^2 W = 0.$$

Равенство это распадается на вещественную и мнимую часть

$$W = \frac{1}{2k^2 A} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(g_{ij} \frac{\partial A}{\partial q_j} \right) \tag{8}$$

$$\sum_{ij} g_{ij} \frac{\partial A}{\partial q_j} p_i = 0.$$

Равенства (8) определяют структуру возмущающих сил, для которых по меньшей мере одно из условий устойчивости не зависит от них явно, и зависит неявно через постоянную живой силы h, имеющую самостоятельный физический смысл. Важно заметить необходимость по меньшей мере структурных ограничений на возмущающие силы. Еще Ляпунов для приводимых уравнений (а сейчас мы занимаемся как раз ими) хорошо показал, что если среди характеристичных чисел существуют равные нулю, а остальные положительны (у нас они все нули), то характер невозмущенного движения зависит от членов выше первого порядка, и что соответствующим изменениям таких членов всегда возможно иметь или устойчивость или неустойчивость по желанию*).

Итак, если возмущающие силы имеют структуру, определенную равенствами (8), то условие устойчивости (7) будет иметь желаемый вид

$$\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(g_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \right) + 2k^2 (U_0 + h) = 0. \tag{9}$$

В чем здесь таится эффективное, если согласно соотношения определяющего функцию ψ ее мы также хорошо не знаем, как не знаем полный интеграл Якоби V для действительных движений?

На соотношение (9) возможно смотреть независимо от прежнего определения функции ψ как на дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которое, как известно, допускает однозначное, конечное и непрерывное во всем пространстве переменных $q_1, \cdots, q_n$ решение ψ вообще не для любого значения h, а только для некоторых. А это значит, что устойчивость (по первому приближению) ведущих или действительных движений рассматриваемой материальной системы может происходить лишь для значений постоянной живой силы h, совпадающей с собственными значениями постоянной h дифференциального уравнения (9).

Из-за эффективности такого рода меняется направление в решении нашей задачи резко на обратное. Вообразим нашу прежнюю материальную систему и допустим, что на нее действуют возмущающие силы с силовой функцией W, определенной формулами (8). Зная наперед силовую функцию коренных или теоретических сил U_0, мы можем найти собственные значения постоянной h дифференциального уравнения (9). Пусть ψ есть некоторая собственная функция этого уравнения, отвечающая постоянной h. Если

*) *К вопросу об устойчивости движения.* Сообщения Харьковского математического общества, 2-я серия, т. III, 1893, стр. 265 - 272.

теперь функцию ψ заменить в уравнении (9) на новую S, определенную формулой

$$\psi = Ae^{ikS},$$

то оно согласно предположения о структуре возмущающих сил при разделении вещественной и мнимой части распадается на два уравнения, из которых первое

$$\frac{1}{2}\sum g_{ij}\frac{\partial S}{\partial q_i}\frac{\partial S}{\partial q_j} = U_0 + W + h$$

говорит, что S будет частным решением уравнения Гамильтона-Якоби, отвечающего действительным движениям рассматриваемой материальной системы, а второе, существующее если это частное решение S находится в полном интеграле Якоби V для действительного движения,

$$\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial S}{\partial q_j}\right) = 0$$

говорит, что при этом необходимое условие устойчивости $\sum \varkappa_s = 0$ всегда удовлетворяется.

Если действительные движения ничем дополнительно не стеснены, то не исключена возможность найти устойчивые движения вне только что выделенных решений. Легко заметить, что все не охваченные этим методом устойчивые действительные движения будут обладать одним общим свойством: для них необходимое условие устойчивости $\Sigma \varkappa_s = 0$ не эквивалентно условию (5).

Если же при всем этом действительные движения таковы, что уравнения в вариациях (3) приводимы с постоянным определителем подстановки, то возможные устойчивые движения такой системы необходимо войдут согласно предыдущего анализа в совокупность полученных решений. Разумеется, в последней хорошо могут находиться при этом побочные или лишние решения, от которых возможно освободиться, если рассматривать всю совокупность необходимых условий устойчивости по первому приближению, а не ограничиваться одним $\Sigma \varkappa_s = 0$.

Пример. Рассмотрим совершенно свободную материальную точку массы m в поле консервативных сил с силовой функцией U_0. Задачу об устойчивости движений такой точки мы поставим по отношению к прямоугольным осям координат x_1, x_2, x_3. Обозначая импульсы по осям соответственно через p_1, p_2, p_3, будем иметь для живой силы известное выражение

$$T = \frac{1}{2m}(p^2{}_1 + p^2{}_2 + p^2{}_3).$$

Если возмущающие силы, определенные силовой функцией W, допускают соотношения

$$W = \frac{1}{2k^2 mA}\Delta A$$

$$\sum \frac{\partial A}{\partial x_i} p_i = 0,$$

то наше дифференциальное уравнение (9), служащее для определения устойчивых движений, будет иметь в этом случае следующий вид:

$$\Delta\psi + 2k^2 m (U_0 + h)\psi = 0.$$

Отсюда видим, что правило отбора устойчивых действительных (и, сокращенно, „приводимых") движений совпадает с известными рецептами современной физики—правилами квантования, так как последнее уравнение имеет вид хорошо известного дифференциального уравнения Шредингера.

Из целого ряда экспериментов определилось значение постоянной k

$$\frac{1}{k} = 1{,}0418 \cdot 10^{-27} \text{ эрг. сек.}$$

Элементарные приложения последнего уравнения к периодическим движениям хорошо известны и не представляют затруднений.

Мы не будем приводить здесь уравнений Шредингера для систем материальных точек, так как в таких случаях, как нами хорошо выяснено, уравнение (9) может давать побочные решения, а в более сложных случаях не исключена возможность существования устойчивого действительного движения и вне таких решений.

3. Условия устойчивости.

В предшествующем параграфе для частного, примитивного случая возмущающих сил одно из необходимых условий устойчивости привелось к применению теоремы существования всюду однозначного, конечного и непрерывного решения дифференциального уравнения второго порядка. Если принять эту мысль, то оказывается и в более общем случае все необходимые условия устойчивости возможно записать через теоремы существования определенного вида решений для системы некоторых дифференциальных уравнений.

Решение так поставленной задачи мы начнем естественно с элементарного случая. А именно, принимая материальную систему и действующие на нее силы определенными в предыдущем параграфе, мы поставим вопрос о выражении необходимых условий устойчивости $x_i = 0$ через теоремы существования для случая, когда уравнения в вариациях (3) являются приводимыми для ведущего, действительного движения.

Следовательно мы допускаем, что существует линейная подстановка

$$x_i = \sum_j \gamma_{ij} \xi_j, \qquad (i=1, \cdots, n),$$

обладающая свойствами: все коэффициенты γ_{ij} вместе с их первыми производными по t суть ограниченные функции t, а величина, обратная составленному из этих коэффициентов определителю $\|\gamma_{ij}\|$, есть ограниченная функция t,—и приводящая дифференциальные уравнения в вариациях (3) к уравнениям в новых переменных x_s с постоянными вещественными коэффициентами p_{sk}

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_k p_{sk} x_k. \qquad (s=1, \cdots, n) \tag{10}$$

А известно, что при таком преобразовании группа характеристичных чисел преобразованной системы уравнений (10) всегда будет тождественной с группой характеристичных чисел $\varkappa_j$ первоначальной (3) и устойчивость изменения переменных ξ_s, согласно уравнений в вариациях (3), будет непосредственно давать устойчивость изменений и новых переменных x_s согласно уравнений (10), и наоборот.

Следовательно, для устойчивости (в рассматриваемом смысле по первому приближению) ведущего или действительного движения материальной системы необходимо, чтобы характеристичное уравнение системы (10)

$$\|p_{ij} - \delta_{ij}\mu\| = 0 \tag{11}$$

имело все корни с вещественной частью равной нулю, так как величины с обратным знаком от этих частей являются характеристичными числами $\varkappa_j$ уравнений (10), а для устойчивости в рассматриваемом смысле необходимо, чтобы удовлетворялись равенства $\varkappa_j = 0$. δ_{ij} есть известный символ Кронекера для обозначения элементов единичной матрицы. А это значит, что в этом случае корни μ_s уравнения (11) необходимо должны быть либо нулями, либо чисто мнимыми величинами.

Если все корни характеристичного уравнения (11) между собою различны или если, по меньшей мере, число групп независимых решений системы (10) есть точно n, то для устойчивости ведущего движения в рассматриваемом смысле необходимо, чтобы существовало n независимых и линейных относительно x_s решений (с постоянными коэффициентами) $W_1, \cdots, W_n$ для дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{dW}{dt} = \sqrt{-1}\,\nu\, W, \tag{12}$$

где ν есть некоторая вещественная постоянная. Хорошо выяснено, что для таких решений значения постоянной $\sqrt{-1}\,\nu$ не могут не совпадать с корнями μ_j характеристичного уравнения (11); μ_j для устойчивых в рассматриваемом смысле ведущих движений не должны иметь вещественной части.

Устойчивость ведущего или действительного движения относительно переменных x_s доказывается при этом непосредственно: рассмотрим определенно положительную функцию

$$\Sigma W_s \overline{W_s},$$

где $\overline{W_s}$ обозначает функцию, сопряженную с W_s; ее полная производная по времени t, согласно уравнений (10), будет нулем; из известной теоремы Ляпунова (*Общая задача*, стр. 61) непосредственно заключаем об устойчивости (относительно x_s и в первом приближении) ведущего движения.

Если в какую-либо из функций W_s мы подставим теперь вместо переменных x_i старые переменные, то получим выражение линейное относительно ξ_j и с коэффициентами $\psi_j^{(s)}$, являющимися однозначными, непрерывными, ограниченными функциями от t

$$W_s = \Sigma\, \psi_j^{(s)} \xi_j. \qquad (s = 1, \cdots, n)$$

Но для ведущего движения переменные материальной системы q_i являются

определенными функциями времени t, и, значит, функции $\psi_j^{(s)}$ могут зависеть от t как явно, так и неявно через Лагражевы координаты q_i.

Полную производную по времени t от функции W_s после такого преобразования нужно брать согласно уравнений в вариациях (3); это дает:

$$\frac{dW_s}{dt}=\sum_j \frac{\partial\psi_j^{(s)}}{\partial t}\xi_j+\sum_{j,i,k}\frac{\partial\psi_j^{(s)}}{\partial q_i}g_{ik}\frac{\partial V}{\partial q_k}\xi_j+\sum_{j,i,k}\psi_j^{(s)}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{jk}\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)\xi_i.$$

Отсюда уравнение (12) перепишется в следующем виде:

$$\sum_j \xi_j\left[\frac{\partial\psi_j^{(s)}}{\partial t}+\sum_{i,k}\frac{\partial\psi_j^{(s)}}{\partial q_i}g_{ik}\frac{\partial V}{\partial q_k}+\sum_{i,k}\psi_i^{(s)}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(g_{ik}\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)-i\nu_s\psi_j^{(s)}\right]=0.$$

Это равенство должно выполняться при произвольных ξ_j; следовательно должны иметь место соотношения

$$\frac{\partial\psi_j^{(s)}}{\partial t}+\sum_{i,k}\frac{\partial\psi_j^{(s)}}{\partial q_i}g_{ik}\frac{\partial V}{\partial q_k}+\sum_{i,k}\psi_i^{(s)}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(g_{ik}\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)=i\nu_s\psi_j^{(s)}. \tag{13}$$

$$(j=1,\cdots,n;\ s=1,\cdots,n)$$

Функция V есть полный интеграл уравнения Якоби для ведущего или действительного движения; в ней постоянные α_j и β_j имеют определенные значения. Функция V удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных

$$\sum g_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial q_j}=2(U_0+W+h). \tag{14}$$

и является частным значением полного интеграла Якоби для действительного движения.

Наша задача решена. Если системы уравнений (13) и (14) имеют полную систему независимых совместных решений при вещественных ν_s и при W определенного вида, то для таких возмущающих сил отвечающее ведущее им действительное движение будет в первом приближении устойчивым в смысле, указанном в первом параграфе. Необходимость этих условий устойчивости ясна для действительных движений материальных систем, если уравнения в вариациях (3) суть приводимые и имеют n групп независимых решений.

Нужно сделать несколько замечаний. Уравнения в вариациях (3) имеют вещественные коэффициенты, поэтому если эти уравнения приводимы, а ведущее действительное движение устойчиво в рассматриваемом смысле по первому приближению, то среди чисел ν_s найдется, по меньшей мере, одно равное нулю, если n нечетно, остальные будут разбиваться на пары с одинаковыми численными значениями, но с разными знаками.

Уравнения (13) имеют полную систему независимых однозначных, конечных и непрерывных решений ψ_j^s не для любых значений постоянных $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ полного интеграла уравнения Якоби (14), а лишь для некоторых, так называемых собственных значений. Определение устойчивых, в рассматриваемом смысле, действительных движений материальной си-

стемы через такие собственные значения не имеет побочных решений (в первом приближении); и только для движений, для которых уравнения в вариациях (3) не являются приводимыми с постоянным определителем подстановки, не исключена возможность иметь устойчивые движения вне таких решений.

Уравнения (13) значительно упрощаются, если им возможно удовлетворить функциями $\psi_j^{(s)}$, не зависящими явно от времени t и получающимися от вариации некоторых функций $\Phi^{(s)}$, зависящих лишь от переменных q_j,

$$\psi_j^{(s)} = \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial q_i}.$$

Согласно ясных отсюда соотношений

$$\frac{\partial \psi_j^{(s)}}{\partial q_i} = \frac{\partial \psi_i^{(s)}}{\partial q_j}$$

уравнениям (13) возможно придать вид

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i,k} g_{ik} \psi_i^{(s)} \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_j} i\nu_s \Phi^{(s)}.$$

И, значит, задача сводится в этом случае на отыскание n независимых частных решений $\Phi^{(s)}$ с однозначными, конечными и непрерывными производными ψ_j^s для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$\sum_{i,k} g_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \frac{\partial V}{\partial q_k} = i\nu\Phi \tag{15}$$

при вещественных значениях ν.

И, наконец, последнее замечание.

В своем анализе мы делали существенное предположение о том, что мнимые или нулевые (для устойчивости) корни μ_j приведенного характеристичного уравнения (11) либо все различны между собою, либо, в случае кратных корней, число групп независимых решений приведенных дифференциальных уравнений (10) равно n. Если эти условия не выполняются, то первое приближение, взятое изолированно, будет неустойчивым за счет появляющихся при этом так называемых вековых членов. Хорошо также известно, что такого рода неустойчивость при подходящем выборе дальнейших приближений в дифференциальных уравнениях возмущенных действительных движений может теряться; ведущее движение может быть устойчивым. Не исключена возможность иметь в некоторых движениях природы устойчивость такого исключительного вида.

Для такого рода устойчивости в рассматриваемом смысле, когда все корни μ_s характеристичного уравнения (11) должны быть либо чисто мнимыми, либо равными нулю, необходимо, чтобы существовало n независимых и линейных относительно x_i форм с постоянными коэффициентами

$$W^{(s)}{}_1, \ldots, W^{(s)}{}_{n_s},$$

удовлетворяющих уравнениям в частных производных первого порядка

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dW^{(s)}{}_1}{dt} &= \mu_s\, W^{(s)}{}_1 \\
\frac{dW^{(s)}{}_r}{dt} &= \mu_s\, W^{(s)}{}_r - W^{(s)}{}_{r-1}\,.
\end{aligned}
$$

Здесь $r=2, \cdots, n_s$, если корень μ_s имеет для этой группы решений кратность n_s; $s=1, \cdots, k$, если k обозначает число групп независимых решений приведенной системы дифференциальных уравнений (10);

$$n_1 + \cdots + n_k = n.$$

Если теперь в функции $W_r^{(s)}$ заменить переменные x_i на старые переменные ξ_j, то получатся выражения линейные относительно ξ_j с коэффициентами $\psi_j^{(sr)}$, являющимися, очевидно, однозначными, непрерывными и ограниченными функциями t

$$W_r^{(s)} = \sum_j \psi_j^{(sr)}\, \xi_j.$$

Функции $\psi_j^{(sr)}$ зависят от t явно и неявно, быть может, через переменные q_i рассматриваемого ведущего или действительного движения материальной системы. Полную производную по времени t от функции $W_r^{(s)}$ после такого преобразования нужно брать поэтому согласно уравнений в вариациях (3) и согласно канонических уравнений действительных движений материальной системы. Уравнения (16), отсюда, будут иметь следующий явный вид:

$$\sum_j \xi_j \left[\frac{\partial \psi_j^{(s1)}}{\partial t} + \sum_{i,\,k} \frac{\partial \psi_j^{(s1)}}{\partial q_i} g_{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} + \sum_{i,\,k} \psi_i^{(s1)} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(g_{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) - \mu_s\, \psi_j^{(s1)} \right] = 0.$$

$$\sum_j \xi_j \left[\frac{\partial \psi_j^{(sr)}}{\partial t} + \sum_{i,\,k} \frac{\partial \psi_j^{(sr)}}{\partial q_i} g_{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} + \sum_{i,\,k} \psi_i^{(sr)} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(g_{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) - \mu_s \psi_j^{(sr)} + \psi_j^{(s,\,r-1)} \right] = 0.$$

Эти соотношения должны выполняться при произвольных ξ_j; следовательно, должно быть:

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \psi_j^{(s1)}}{\partial t} + \sum_{ik} \frac{\partial \psi_j^{(s1)}}{\partial q_i} g_{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} + \sum_{ik} \psi_i^{(s1)} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(g_{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) = \mu_s \psi_j^{(s1)} \\
&\frac{\partial \psi_j^{(sr)}}{\partial t} + \sum_{ik} \frac{\partial \psi_j^{(sr)}}{\partial q_i} g_{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} + \sum \psi_i^{(sr)} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(g_{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) = \mu_s \psi_j^{(sr)} - \psi_j^{(s,\,r-1)}.
\end{aligned}
$$

Этими соотношениями и в исключительном случае устойчивости наша задача сводится на определение системы собственных функций $\psi_j^{(sr)}$ и собственных значений постоянных $\alpha, \cdots, \alpha_n$ для уравнений (17).

Не представляет труда расписать в аналогичном духе условия устойчивости по первому приближению для дифференциальных уравнений в вариациях Пуанкаре (2). Но на этом пока мы не будем останавливаться.

Пример. Рассмотрим систему совершенно свободных и одинаковых частиц и обозначим координаты i—той частицы через x_i, y_i, z_i. На каждую частицу пусть действуют силы одной общей природы с силовой функцией

$$\sum_i U_0(x_i, y_i, z_i).$$

Силы возможного взаимодействия между частицами и возможные другие малые силы условимся понимать возмущающими; мы допустим, что силовая функция возмущающих сил $W(x_1, y_1, z_1 \cdots, x_n, y_n, z_n)$ является симметричной, не изменяющейся от перестановки двух индексов между собою.

Уравнения (17) могут при этом иметь симметрические и антисимметрические решения $\psi_j^{(sr)}$. Из общей структуры дифференциальных уравнений (17) непосредственно видно, что функции $\psi_j^{(sr)}$, принадлежащие к одной и той же группе решений, должны быть одного типа. В общем случае тип решения $\psi_j^{(sr)}$ распространяется на все функции и только в исключительных случаях, что зависит от функции V, тип решения системы (17) может быть смешанным. В некоторых случаях тип решения уравнений (17) определяется весьма просто.

Если рассматриваемая система состоит из электронов и если два какие-либо электрона P_i и P_j приближаются между собою, то в возмущающей силовой функции будет играть значительную роль член

$$-\frac{f}{r_{ij}},$$

f—некоторая положительная постоянная, r_{ij} — расстояние между электронами P_i и P_j. Отсюда ясно, что положение $r_{ij} = 0$ не может быть устойчивым; следовательно функции $\psi_j^{(sr)}$ должны быть таковы, что при $r_{ij} = 0$ они должны обращаться в нуль. Это говорит, что в рассматриваемом случае решение должно быть антисимметрическим.

Если система состоит из частиц, не взаимодействующих между собою (фотонов), или если она состоит из частиц, притягивающихся друг к другу, то случай $r_{ij} = 0$ из соображений устойчивости не должен быть исключен. Другими словами, решение $\psi_j^{(sr)}$ не должно быть антисимметрическим.

Этими общими предложениями возможно дополнить правило отбора устойчивых траэкторий (предшествующий параграф) для тех случаев, когда дифференциальное уравнение (9) дает побочные решения.

Нельзя не заметить, что аналогичные рассуждения возможно провести также для случаев электромагнитных и жироскопических сил, так как в этих случаях канонический вид дифференциальных уравнений движения хорошо известен. Но на этой работе мы не будем здесь останавливаться, так как теперь, после изученного случая консервативных сил, она явится лишь упражнением очень простого вычислительного характера.